Universidad Latina de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Civil
Análisis Estructural II (IC-0804)

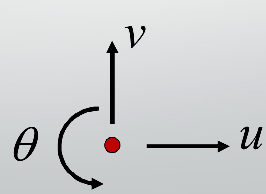
Prof.: Ing. Ronald Jiménez Castro
III Cuatrimestre, 2022

TEMA IV: MARCOS PLANOS Y MALLAS

Una vez cubierto los temas de armaduras y vigas continuas, se abordará a continuación el análisis de <u>marcos o pórticos planos.</u>

Un marco está compuesto de elementos viga-columna (llamados en inglés tipo *"frame"*), es decir que pueden ser sometidos tanto a carga axial como a flexión.

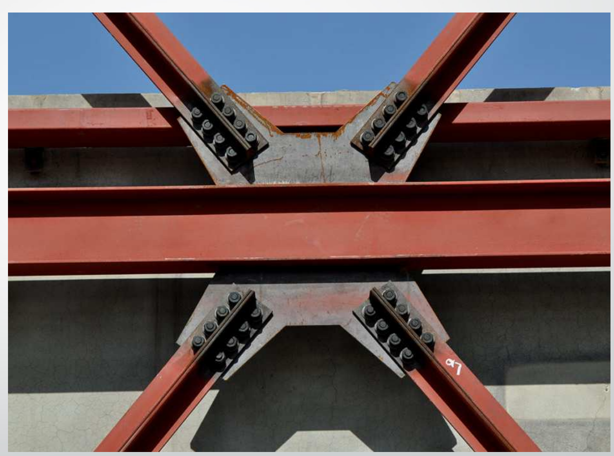
Los elementos de un marco plano representan el caso más general en términos de cantidad de grados de libertad: **3 por nudo** (desplazamiento horizontal u, desplazamiento vertical v y rotación θ).



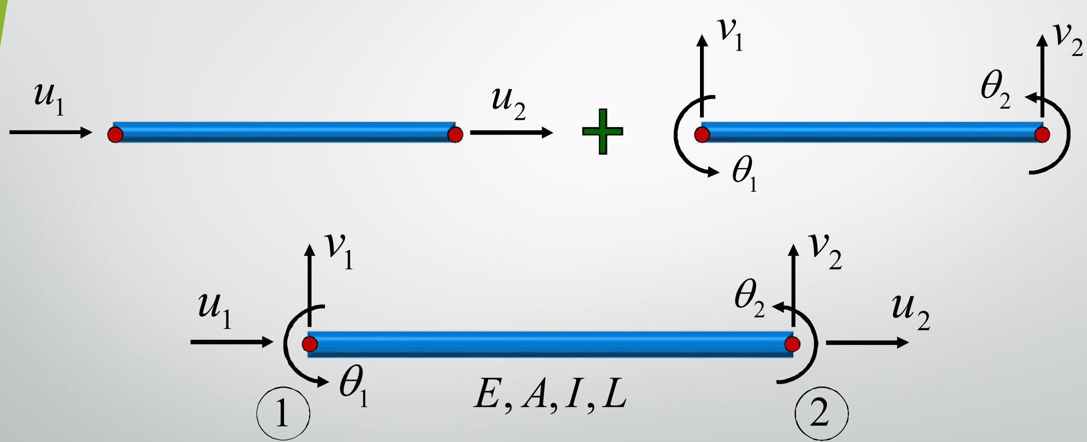
El sistema estructural tipo marco es ampliamente utilizados en edificaciones incluso desde finales del siglo XIX e inicios del siglo pasado con los primeros rascacielos en Nueva York y Chicago como el Empire State, Chrysler, Monadnock, etc.

Edificio Empire State
Etapa constructiva, 23avo piso
1931

Detalle de unión arriostres-viga en un marco de acero



Considerando ahora como grados de libertad a las rotaciones y los desplazamientos (horizontales y verticales) en ambos extremos del miembro (nodos *1* y *2*) se tiene:



Nota: Se muestran las rotaciones y los desplazamientos en sus direcciones positivas (+)

Asociados a estos desplazamientos (traslaciones y rotaciones) se tiene el siguiente sistema de fuerzas nodales:

p_1, p_2 *: fuerzas paralelas al eje del elemento (axiales)*

f_1, f_2 *: fuerzas transversales al elemento (cortantes)*

m_1, m_2 *: momentos flectores*

La matriz de rigidez de un elemento de marco, en coordenadas locales es:

$$\begin{array}{c} \textit{Grados de libertad} \rightarrow \quad u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2 \end{array}$$

$$[k]_{local} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

Conviene observar de la anterior matriz de rigidez general de un elemento tipo marco, se puede “deducir” la de una viga continua que ignora las deformaciones axiales:

$$[k]_{local} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \textit{Grados de libertad} \rightarrow \quad v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \end{array}$$

$$[k]_{local} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

De forma análoga, para un elemento tipo armadura que sólo considera los grados de desplazamiento longitudinal:

$$
[k]_{local} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_1 & \phantom{\frac{12EI}{L^3}} & \phantom{\frac{6EI}{L^2}} & u_2 & \phantom{\frac{-12EI}{L^3}} & \phantom{\frac{6EI}{L^2}} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
\frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Grados de libertad $\boxed{u_1 \quad u_2}$

$$
[K] = \begin{pmatrix}
\frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\
\frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L}
\end{pmatrix}
$$

La matriz de transformación ***[T]*** de un elemento de marco es:

$$
[T] = \begin{pmatrix}
\cos\theta & sen\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\theta & sen\theta & 0 \\
0 & 0 & 0 & -sen\theta & \cos\theta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

El procedimiento a seguir es análogo al empleado en cerchas y vigas continuas:

1. Numerar nudos, elementos y grados de libertad.
2. Determinar la matriz de rigidez de cada elemento (vigas, columnas, arriostres, etc.) en sus coordenadas locales $[k]_{local}$.
3. Transformar (si fuera necesario) las matrices de cada miembro a coordenadas globales.

$$[k]=[T]^T[k]_{local}[T]$$

4. Ensamblar la matriz de rigidez global $[K]_G$
5. Condensar la matriz de rigidez global, es decir, suprimir las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad restringidos:

$$[K_{cond}]\equiv[K_{ff}]$$

6. Calcular las fuerzas de extremo fijo para cada uno de los tramos según su patrón de carga y obtener con éstas los respectivos valores globales $\{F_{FEM}\}$. En los apoyos deberán obtenerse los valores netos que resultan de la suma de las fuerzas de los tramos adyacentes.
7. Invertir los sentidos de las cargas de extremo fijo globales para "convertirlas" en las cargas nodales equivalentes. De este conjunto de fuerzas se deberá escogerse las asociadas a los grados de libertad no restringidos, para construir el vector de fuerzas: $\{F_f\}$
8. Hallar los desplazamientos y/o rotaciones en los nudos mediante:

$$\{D_f\}=[K_{cond}]^{-1}\left(\{F_f\}-[K_{fr}]\{D_r\}\right)$$

9. Calcular las reacciones en los apoyos

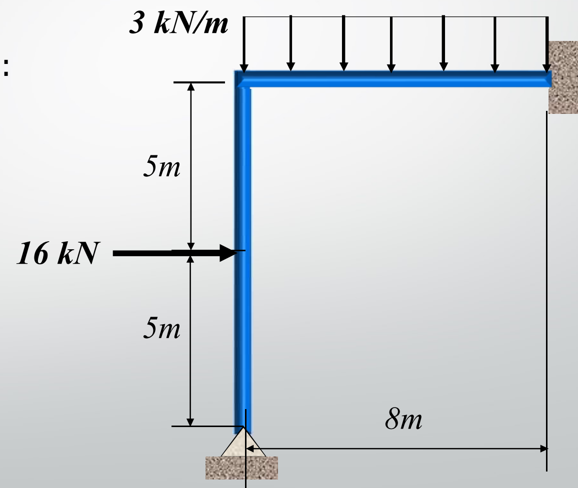
$$\{F_r\}=[K_{rf}]\{D_f\}+[K_{rr}]\{D_r\}$$

Semana 10_Ejemplo 1: Análisis de un marco 2D

Calcular los desplazamientos nodales así como las reacciones en los apoyos del siguiente marco. Posteriormente trazar los diagramas de cortante V y momento M.

Considere para ambos elementos:

- ✓ E = 2x10^8 kN/m^2
- ✓ A = 0.005 m^2
- ✓ I = 0.00003 m^4



Numeración propuesta para nudos y elementos

(#) : Número de nudo

[#] : Número de elemento

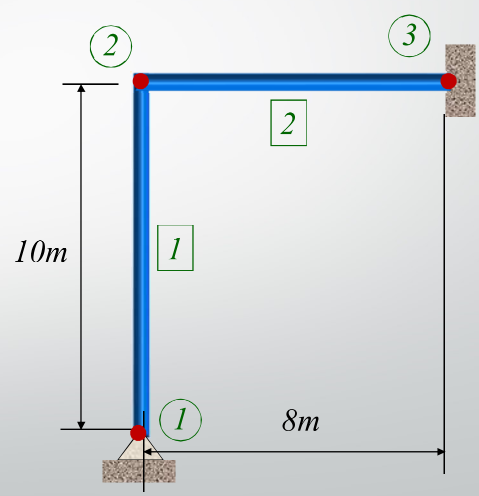
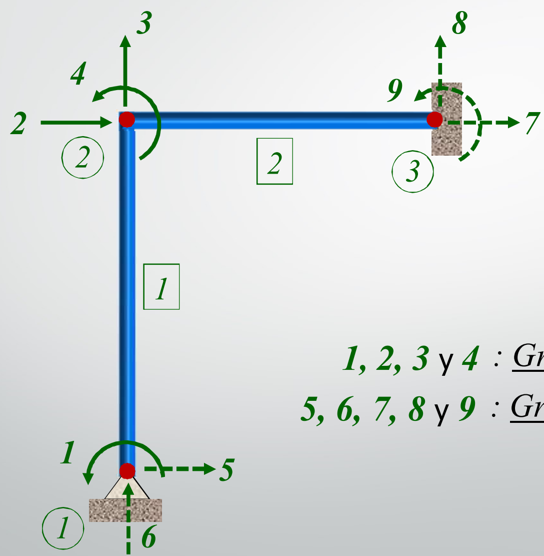


Tabla de conectividad

Elemento	Nudo i	Nudo j	θ
1	1	2	90°
2	2	3	0°

Numeración propuesta para grados de libertad
(mostrados en sus direcciones positivas+)



1, 2, 3 y ***4*** : *Grados de libertad libres*

5, 6, 7, 8 y ***9*** : *Grados de libertad restringidos*

Se calcula para cada elemento, su matriz de rigidez en coordenadas globales; es decir, aplicándoles la respectiva transformación de coordenadas:

$$[k]_1 = [T]_1^{\,T}[k]_{1,local}[T]_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 72 & 0 & -360 & -72 & 0 & -360 \\ 0 & 100000 & 0 & 0 & -100000 & 0 \\ -360 & 0 & 2400 & 360 & 0 & 1200 \\ -72 & 0 & 360 & 72 & 0 & 360 \\ 0 & -100000 & 0 & 0 & 100000 & 0 \\ -360 & 0 & 1200 & 360 & 0 & 2400 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$[k]_2 = [T]_2^{\,T}[k]_{2,local}[T]_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 125000 & 0 & 0 & -125000 & 0 & 0 \\ 0 & 141 & 563 & 0 & -141 & 563 \\ 0 & 563 & 3000 & 0 & -563 & 1500 \\ -125000 & 0 & 0 & 125000 & 0 & 0 \\ 0 & -141 & -563 & 0 & 141 & -563 \\ 0 & 563 & 1500 & 0 & -563 & 3000 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

A partir de las matrices individuales se ensambla la matriz de rigidez total:

$$[K]_G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 2400 & 360 & 0 & 1200 & -360 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 360 & 125072 & 0 & 360 & -72 & 0 & -125000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100141 & 563 & 0 & -100000 & 0 & -141 & 563 \\ 1200 & 360 & 563 & 5400 & -360 & 0 & 0 & -563 & 1500 \\ \hline -360 & -72 & 0 & -360 & 72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100000 & 0 & 0 & 100000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -125000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 125000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -141 & -563 & 0 & 0 & 0 & 141 & -563 \\ 0 & 0 & 563 & 1500 & 0 & 0 & 0 & -563 & 3000 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

También llamada Matriz de rigidez ***condensada***

$$[K]_G = \left(\begin{array}{c|c} \left[K_{ff}\right]_{4x4} & \left[K_{fr}\right]_{4x5} \\ \hline \left[K_{rf}\right]_{5x4} & \left[K_{rr}\right]_{5x5} \end{array}\right)_{9x9}$$

De esta matriz total se extrae la submatriz $[K_{ff}]$ asociada a los grados de libertad libres (***free***) únicamente:

$$[K_{ff}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2400 & 360 & 0 & 1200 \\ 360 & 125072 & 0 & 360 \\ 0 & 0 & 100141 & 563 \\ 1200 & 360 & 563 & 5400 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

El vector de desplazamientos nodales de la estructura se obtiene resolviendo la ecuación matricial:

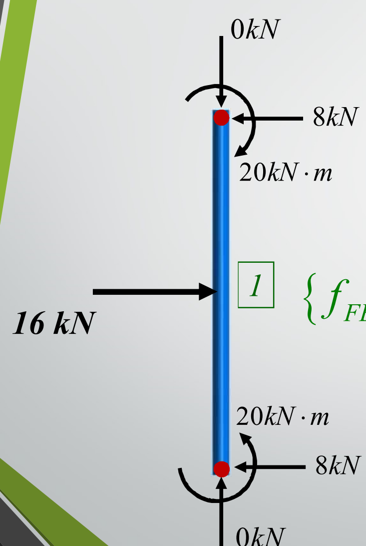
$$\left\{D_f\right\} = \left[K_{ff}\right]^{-1}\left(\left\{F_f\right\} - \left[K_{fr}\right]\left\{D_r\right\}\right)$$

En este caso en particular, no se tiene movimientos en los apoyos (asentamientos), el vector $\left\{D_r\right\}$ es nulo por lo que la expresión anterior se reduce a:

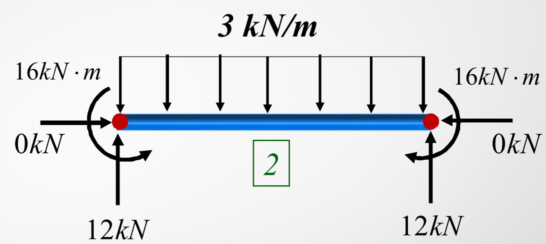
$$\left\{D_f\right\} = \left[K_{ff}\right]^{-1}\left\{F_f\right\}$$

A continuación se muestra el cálculo del vector de fuerzas $\left\{F_f\right\}$ asociado a los grados de libertad libres.

*Fuerzas de extremo fijo para ambos tramos (**reacciones**):* $\left\{f_{FEM}\right\}$



$\left\{f_{FEM}\right\}_1$

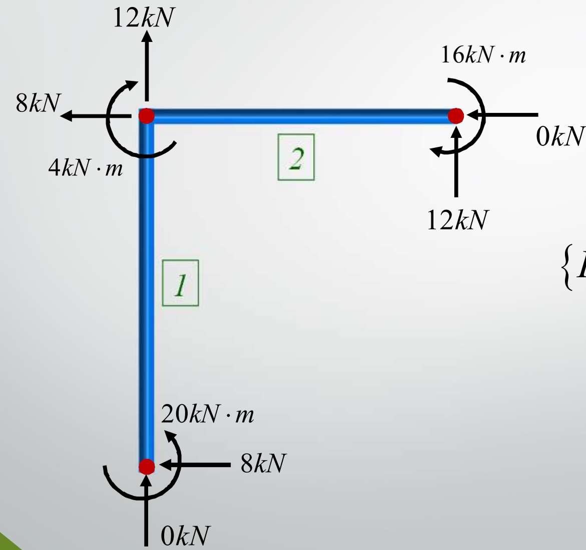


$\left\{f_{FEM}\right\}_2$

$$\left\{f_{FEM}\right\}_1 = \begin{Bmatrix} -8 \\ 0 \\ 20 \\ -8 \\ 0 \\ -20 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

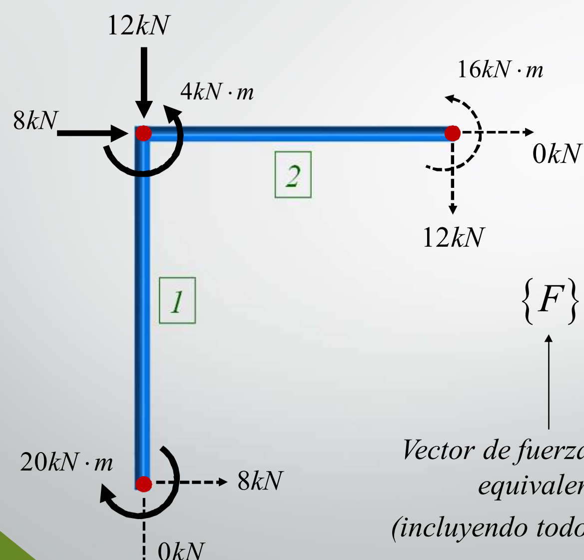
$$\left\{f_{FEM}\right\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 16 \\ 0 \\ 12 \\ -16 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Al superponer ambos sistemas de fuerzas, se obtiene el vector de fuerzas de extremo fijo para toda la estructura $\{F_{FEM}\}$



$$\{F_{FEM}\} = \begin{array}{l} \left\{ \begin{matrix} 20 \\ -8 \\ 12 \\ -4 \\ \hdashline -8 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ -16 \end{matrix} \right\} \end{array} \begin{array}{ll} kN*m & 1 \\ kN & 2 \\ kN & 3 \\ kN*m & 4 \\ kN & 5 \\ kN & 6 \\ kN & 7 \\ kN & 8 \\ kN*m & 9 \end{array}$$

Al invertir el sentido de estas fuerzas, se obtienen las fuerzas nodales equivalentes al sistema de cargas originales.



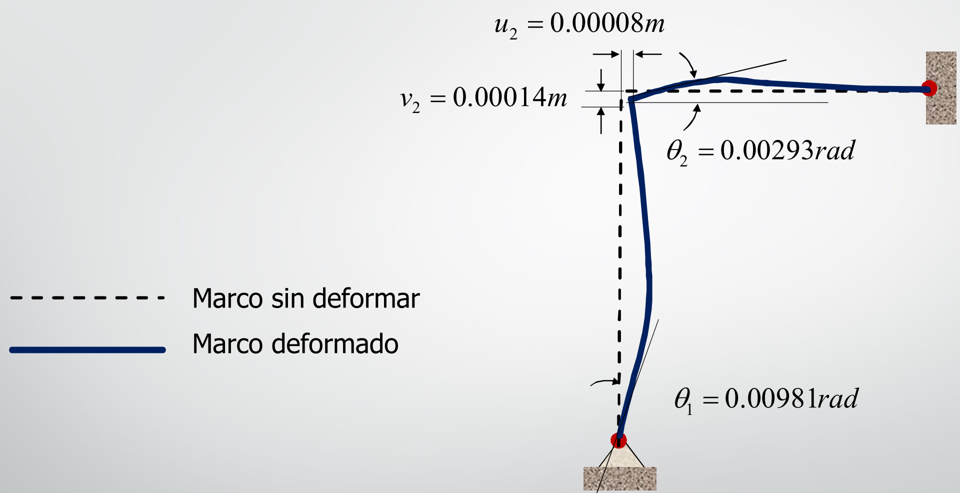
$$\{F\} = -\{F_{FEM}\} = \begin{array}{l} \left\{ \begin{matrix} -20 \\ 8 \\ -12 \\ 4 \\ \hdashline 8 \\ 0 \\ 0 \\ -12 \\ 16 \end{matrix} \right\} \end{array} \begin{array}{ll} kN*m & 1 \\ kN & 2 \\ kN & 3 \\ kN*m & 4 \\ kN & 5 \\ kN & 6 \\ kN & 7 \\ kN & 8 \\ kN*m & 9 \end{array}$$

Vector de fuerzas nodales equivalentes (incluyendo todos los g.d.l)

Considerando únicamente los grados de libertad libres (*1*, *2*, *3* y *4*); los vectores de fuerzas y desplazamientos globales serán respectivamente:

$$\{F_f\}=\begin{Bmatrix}-20\\8\\-12\\4\end{Bmatrix}\begin{matrix}kN*m & \mathbf{1}\\kN & \mathbf{2}\\kN & \mathbf{3}\\kN*m & \mathbf{4}\end{matrix} \qquad \{D_f\}=\begin{Bmatrix}\theta_1\\u_2\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix}\begin{matrix}rad & \mathbf{1}\\m & \mathbf{2}\\m & \mathbf{3}\\rad & \mathbf{4}\end{matrix}$$

$$\{D_f\}=\left[K_{ff}\right]^{-1}\{F_f\}=\begin{Bmatrix}-0.00981\\0.00008\\-0.00014\\0.00293\end{Bmatrix}\begin{matrix}rad & \mathbf{1}\\m & \mathbf{2}\\m & \mathbf{3}\\rad & \mathbf{4}\end{matrix}$$

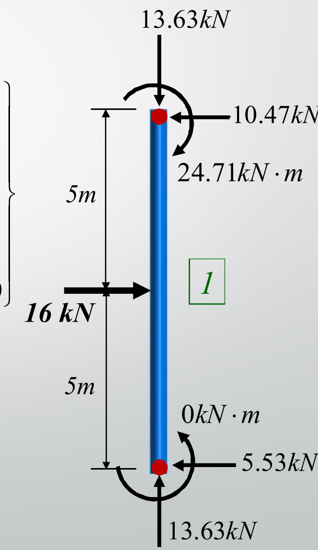


Posteriormente se calculan las fuerzas en los extremos de cada miembro:

$$\{f\}_1 = [k]_1 \{d\}_1 + \{f_{FEM}\}_1$$

$$\{f\}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 72 & 0 & -360 & -72 & 0 & -360 \\ 0 & 100000 & 0 & 0 & -100000 & 0 \\ -360 & 0 & 2400 & 360 & 0 & 1200 \\ -72 & 0 & 360 & 72 & 0 & 360 \\ 0 & -100000 & 0 & 0 & 100000 & 0 \\ -360 & 0 & 1200 & 360 & 0 & 2400 \end{pmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00981 \\ 0.00008 \\ -0.00014 \\ 0.00293 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -8 \\ 0 \\ 20 \\ -8 \\ 0 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

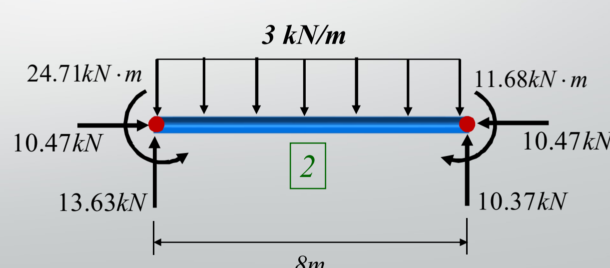
$$\{f\}_1 = \begin{Bmatrix} -5.53 \\ 13.63 \\ 0 \\ -10.47 \\ -13.63 \\ -24.71 \end{Bmatrix} \begin{array}{ll} kN & 5 \\ kN & 6 \\ kN*m & 1 \\ kN & 2 \\ kN & 3 \\ kN*m & 4 \end{array}$$



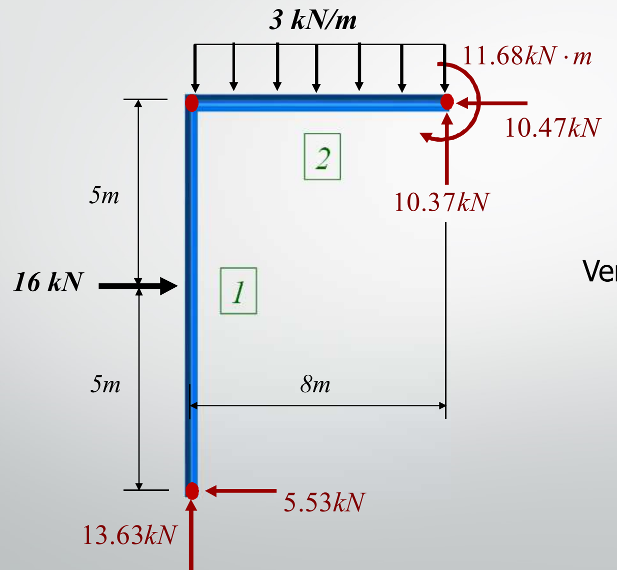
Para el elemento horizontal: $\{f\}_2 = [k]_2 \{d\}_2 + \{f_{FEM}\}_2$

$$\{f\}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 125000 & 0 & 0 & -125000 & 0 & 0 \\ 0 & 141 & 563 & 0 & -141 & 563 \\ 0 & 563 & 3000 & 0 & -563 & 1500 \\ -125000 & 0 & 0 & 125000 & 0 & 0 \\ 0 & -141 & -563 & 0 & 141 & -563 \\ 0 & 563 & 1500 & 0 & -563 & 3000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0.00008 \\ -0.00014 \\ 0.00293 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 16 \\ 0 \\ 12 \\ -16 \end{Bmatrix}$$

$$\{f\}_2 = \begin{Bmatrix} 10.47 \\ 13.63 \\ 24.71 \\ -10.47 \\ 10.37 \\ -11.68 \end{Bmatrix} \begin{array}{ll} kN & 2 \\ kN & 3 \\ kN*m & 4 \\ kN & 7 \\ kN & 8 \\ kN*m & 9 \end{array}$$



Las reacciones en los apoyos se obtienen superponiendo las cargas de extremo fijo de los miembros:



Verificación del equilibrio:

$$\left\{\begin{array}{l}\sum F_x = 0 \ \checkmark \\ \sum F_y = 0 \ \checkmark \\ \sum M = 0 \ \checkmark\end{array}\right.$$

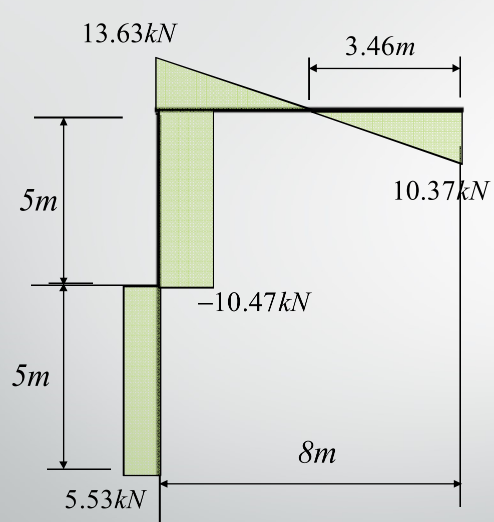


Diagrama Cortante ***V***

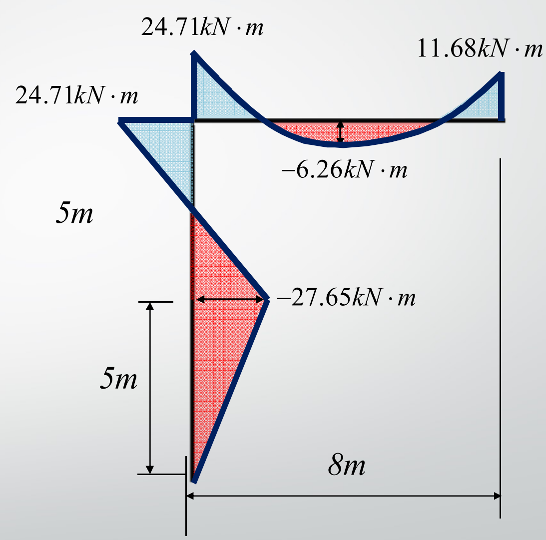
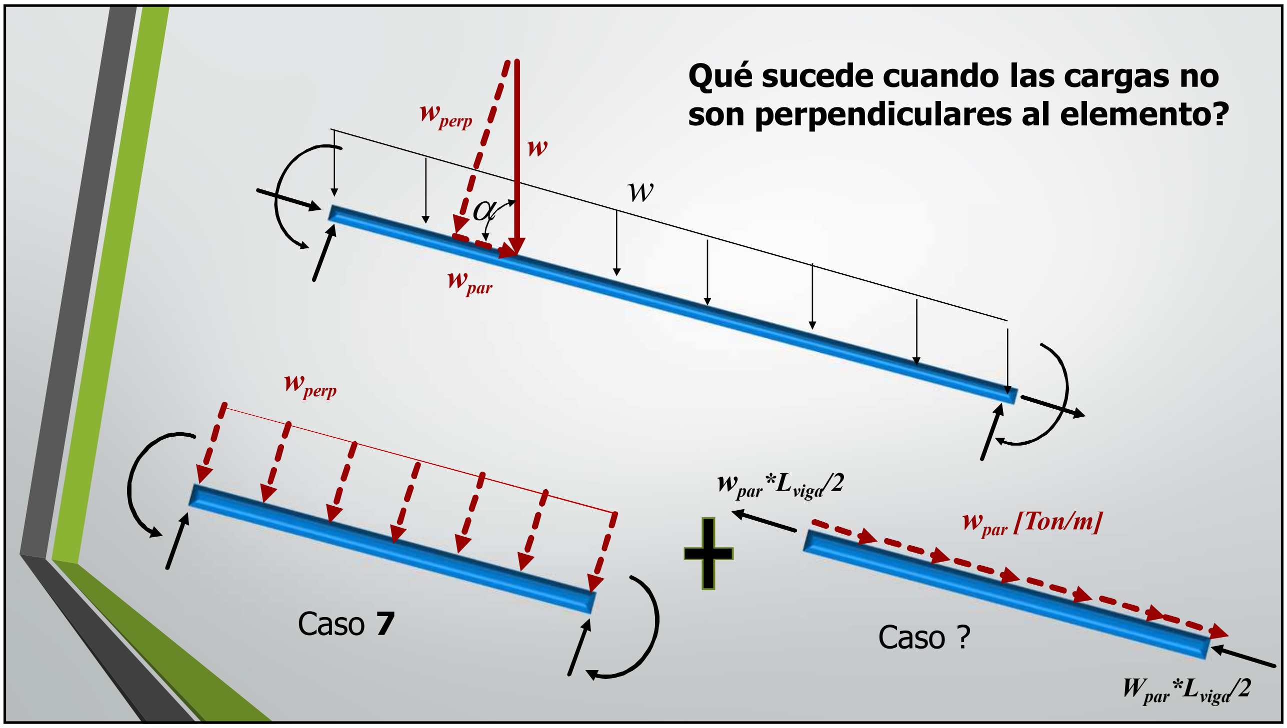


Diagrama Momento ***M***


Qué sucede cuando las cargas no son perpendiculares al elemento?
w_{perp}
w
w
α
w_{par}
w_{perp}
Caso **7**
$w_{par}*L_{viga}/2$
w_{par} [Ton/m]
Caso ?
$W_{par}*L_{viga}/2$