

Universidad Latina de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Civil
Análisis Estructural II (IC-0804)



Prof.: Ing. Ronald Jiménez Castro
III Cuatrimestre, 2022

TEMA III: ELEMENTOS TIPO VIGA

Las vigas continuas son elementos rectos en los cuales las deformaciones por flexión controlan su comportamiento; es decir, las deformaciones axiales y por cortante son despreciables para las dimensiones más usuales de vigas. Por esta razón, su análisis se puede efectuar en términos de un grado de libertad en cada apoyo: rotación del nudo.

Esto indudablemente simplifica mucho el análisis ya que sólo se necesitan unos cuantos términos en la matriz de rigidez del miembro.

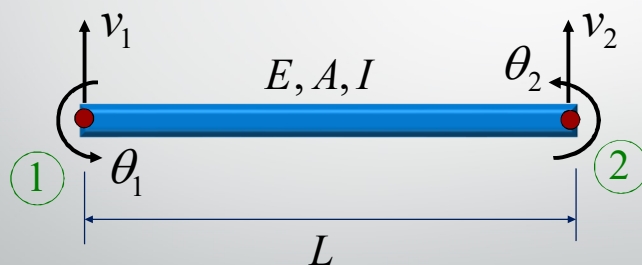


Otra ventaja significativa del análisis de vigas continuas es que no es necesario hacer transformación de coordenadas porque las coordenadas de los miembros (*locales*) están orientadas en la misma dirección de las coordenadas de la estructura (*globales*) y las rotaciones no se transforman.



Considérese un elemento prismático de longitud L , área transversal A e inercia I con respecto al eje de flexión (perpendicular al plano de la "pantalla") y de un material con módulo de elasticidad E .

Si se ignoran las deformaciones axiales, para este miembro se definen **4 grados de libertad**: el desplazamiento vertical v y la rotación θ en cada uno de los extremos (nodos **1** y **2**).



v_1 : g.d.l. #1

θ_1 : g.d.l. #2

v_2 : g.d.l. #3

θ_2 : g.d.l. #4

Nota: Se muestran las rotaciones y los desplazamientos en dirección positiva (+)

Asociados a estos desplazamientos (traslaciones y rotaciones) se tiene el siguiente sistema de fuerzas nodales:



f_1, f_2 : fuerzas transversales al elemento (cortantes)

m_1, m_2 : momentos flectores

Expresando estas fuerzas y desplazamientos en notación matricial:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix}$$

Vector de fuerzas nodales

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Vector de desplazamientos nodales

Sabiendo que las fuerzas y los desplazamientos están relacionados mediante la rigidez del elemento, se tiene:

$$\{f\} = [k]\{d\}$$

En este caso, la matriz de rigidez $[k]$ de la viga, se expresa como:

$$[k] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

k_{ij} : coeficiente de rigidez que relaciona la fuerza i con el desplazamiento j .

El coeficiente de rigidez k_{ij} se interpreta como la fuerza que se genera en el grado de libertad i debida a una desplazamiento unitario aplicado en el grado de libertad j .

Por lo tanto, la ecuación matricial $\{f\} = [k]\{d\}$ se expresa como:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Expandiendo la primera fila se tiene:

$$f_1 = \underbrace{k_{11}v_1}_{f_{11}} + \underbrace{k_{12}\theta_1}_{f_{12}} + \underbrace{k_{13}v_2}_{f_{13}} + \underbrace{k_{14}\theta_2}_{f_{14}} = \sum_{j=1}^4 f_{1j}$$

$f_{11} = k_{11}v_1$
 $v_1 = 1$
 Grado de libertad #1

$f_{12} = k_{12}\theta_1$
 $\theta_1 = 1$
 Grado de libertad #2

$f_{13} = k_{13}v_2$
 $v_2 = 1$
 Grado de libertad #3

$f_{14} = k_{14}\theta_2$
 $\theta_2 = 1$
 Grado de libertad #4

En resumen, f_i es la suma de las fuerzas en la dirección del grado de libertad #1 causadas por cada uno de los 4 desplazamientos (2 traslaciones y 2 rotaciones).

Es decir, la matriz de rigidez de una viga (en coordenadas globales) es:

Grados de libertad →

	v_1	θ_1	v_2	θ_2
$[k] =$	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$
	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$
	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$

4x4

La anterior expresión también pueden manejarse como:

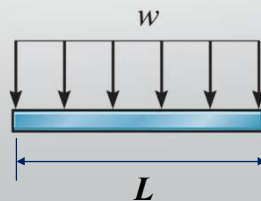
$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Tratamiento de fuerzas intermedias

Para aplicar el Método de Rigidez, es importante que los tramos de la viga estén libres de cargas en toda su longitud. Esto es necesario dado que la respectiva matriz de rigidez se desarrolló solamente para cargas aplicada en sus extremos.

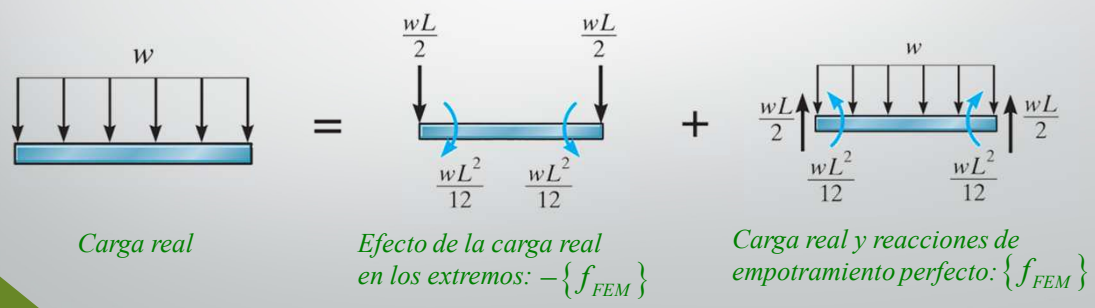
Sin embargo, lo más usual en la práctica es que las vigas soporten cargas distribuidas lo que implica hacer modificaciones para poder realizar el análisis matricial.

Para ilustrar este procedimiento de conversión a cargas nodales, se aplicará el Principio de Superposición a un tramo de viga de longitud L sometido a una carga distribuida uniforme w .

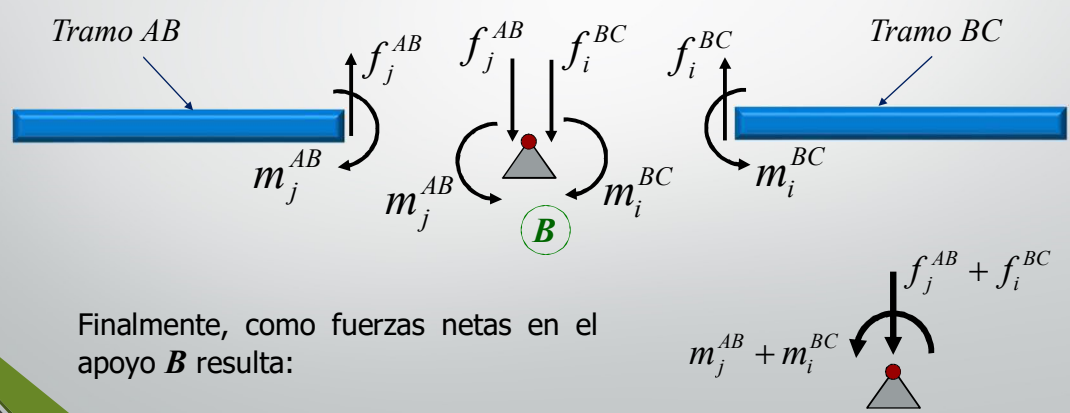


Primeramente se aplicarán en los extremos, los efectos que el patrón de cargas real tiene sobre el elemento, en términos de fuerzas y momentos de extremo fijo o sea, considerando empotramiento en ambos extremos. Este sistema de fuerzas, que reemplaza la carga original, se designa como: $-\{f_{FEM}\}$

Luego, esas fuerzas y momentos se aplican en forma de **reacciones** al elemento, es decir, las fuerzas **FEM (Fixed End Moments)**. Por lo tanto, las cargas reales en la viga resultan de sumar ambos casos.



Una vez definidas estas fuerzas de extremo fijo en cada tramo de la viga continua, se necesita transferirlas a los nudos adyacentes y considerarlas cargas nodales equivalentes. Para esto, simplemente se invierte la dirección de estas fuerzas y se colocan en el respectivo apoyo; es decir, en cada apoyo se deben sumar las fuerzas (y/o momentos) provenientes de los tramos adyacentes.



Finalmente, como fuerzas netas en el apoyo **B** resulta:

Finalmente, el vector de fuerzas nodales de toda la viga $\{F\}$ se compone de las fuerzas netas en los apoyos de la misma.

La fuerza cortante y el momento en los extremos de cada tramo de viga pueden determinarse a partir de la ecuación $\{f\} = [k]\{d\} + \{f_{FEM}\}$

; donde $\{f_{FEM}\}$ representa el efecto de las reacciones de extremo fijo (si el elemento está sometido a cargas intermedias).

El procedimiento a seguir es:

1. Numerar nudos, elementos y grados de libertad.
2. Determinar la matriz de rigidez de cada segmentos de viga $[k]$
3. Ensamblar la matriz de rigidez global $[K_G]$
4. Condensar la matriz de rigidez, es decir, suprimir las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad restringidos: $[K_{cond}]$
5. Calcular las fuerzas de extremo fijo para cada uno de los tramos según su patrón de carga (Ver Tabla "*Reacciones de extremo fijo (FEM)*") y obtener con éstas los respectivos valores globales $\{F_{FEM}\}$. En los apoyos deberán obtenerse los valores netos que resultan de la suma de las fuerzas de los tramos adyacentes.
6. Invertir los sentidos de las cargas de extremo fijo globales para "convertirlas" en las cargas nodales equivalentes. De este conjunto de fuerzas se deberá escogerse las asociadas a los grados de libertad no restringidos, para construir el vector de fuerzas: $\{F\}$

7. Hallar los desplazamientos y/o rotaciones en los nudos mediante:

$$\{D\} = [K_{cond}]^{-1} \{F\}$$

8. Calcular las reacciones en los apoyos:

$$\{F\} = [K_G] \{D\} + \{F_{FEM}\}$$

Reacciones de extremo fijo (FEM)

P, q y segmentos en valor absoluto

SOLICITACION	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO RESPECTO	REACCIONES EN LOS APOYOS	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
	$M_1^L = \frac{Pab^2}{L^2}(1 + \frac{b}{L})$ $M_2^R = -\frac{Pa^2b}{L^2}$	$R_1 = P \frac{b^2}{L^2}(1 + \frac{b}{L})$ $R_2 = P \frac{a^2}{L^2}(1 + \frac{a}{L})$	
	$M_1^L = \frac{PL}{8}$ $M_2^R = -\frac{PL}{8}$	$R_1 = \frac{P}{2}$ $R_2 = \frac{P}{2}$	
	$M_1^L = \frac{PaL^2 - a^3}{L}$ $M_2^R = -\frac{PaL(a-L)}{L}$	$R_1 = P$ $R_2 = P$	
	$M_1^L = \frac{5qL^3}{384}$ $M_2^R = -\frac{5qL^3}{384}$	$R_1 = \frac{3qL}{2}$ $R_2 = \frac{3qL}{2}$	
	$M_1^L = \frac{qL^3(11-6\sqrt{3})}{320}$ $M_2^R = -\frac{qL^3(11-6\sqrt{3})}{320}$	$R_1 = \frac{3}{2}qL$ $R_2 = \frac{3}{2}qL$	
	$M_1^L = \frac{qL^3(11-6\sqrt{3})}{320}$ $M_2^R = -\frac{qL^3(11-6\sqrt{3})}{320}$	$R_1 = \frac{3}{2}qL$ $R_2 = \frac{3}{2}qL$	
	$M_1^L = \frac{qL^3(11-6\sqrt{3})}{320}$ $M_2^R = -\frac{qL^3(11-6\sqrt{3})}{320}$	$R_1 = \frac{3}{2}qL$ $R_2 = \frac{3}{2}qL$	

P, q y segmentos en valor absoluto

SOLICITACION	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO RESPECTO	REACCIONES EN LOS APOYOS	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
	$M_1^L = \frac{qL^3}{12}(12 - 4a^2)$ $M_2^R = -\frac{qL^3}{12}(12 - 4a^2)$	$R_1 = qL$ $R_2 = qL$	
	$M_1^L = 2qL^3 \left[\frac{a^3}{2L^2} - \frac{a^2}{L} + \frac{2a}{3} \right]$ $M_2^R = -2qL^3 \left[\frac{a^3}{2L^2} - \frac{a^2}{L} + \frac{2a}{3} \right]$	$R_1 = 2qL \left[\frac{a^3}{2L^2} - \frac{a^2}{L} + \frac{2a}{3} \right]$ $R_2 = 2qL \left[\frac{a^3}{2L^2} - \frac{a^2}{L} + \frac{2a}{3} \right]$	
	$M_1^L = \frac{5}{96}qL^3$ $M_2^R = -\frac{5}{96}qL^3$	$R_1 = \frac{qL}{4}$ $R_2 = \frac{qL}{4}$	
	$M_1^L = \frac{qL^3}{30}$ $M_2^R = -\frac{qL^3}{30}$	$R_1 = \frac{3}{20}qL$ $R_2 = \frac{7}{20}qL$	
	$M_1^L = \frac{qL^3}{30} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$ $M_2^R = -\frac{qL^3}{30} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$	$R_1 = \frac{qL}{20} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$ $R_2 = \frac{qL}{20} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$	
	$M_1^L = \frac{qL^3}{60} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$ $M_2^R = -\frac{qL^3}{60} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$	$R_1 = \frac{qL}{20} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$ $R_2 = \frac{qL}{20} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$	
	$M_1^L = \frac{qL^3}{12}$ $M_2^R = -\frac{qL^3}{12}$	$R_1 = \frac{qL}{3}$ $R_2 = \frac{qL}{3}$	
	$M_1^L = \frac{qL^3}{12} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$ $M_2^R = -\frac{qL^3}{12} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$	$R_1 = \frac{qL}{20} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$ $R_2 = \frac{qL}{20} \left[15 - \frac{6a}{L} \right]$	

Como se ha visto, la ecuación básica $\{F\} = [K]\{D\}$ permite calcular los desplazamientos nodales. Dado que la matriz de rigidez se ha ampliado para incluir los grados de libertad que están restringidos (*restrained*), el sistema se puede dividir aislando las filas y columnas de coeficientes que corresponden a estos grados de libertad:

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{K_{ff}} & K_{fr} \\ K_{rf} & K_{rr} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} D_f \\ D_r \end{Bmatrix}$$

— *Matriz de rigidez condensada*

$[K_{ff}]$: submatriz cuadrada asociada a los grados de libertad no restringidos o libres (*free*) también llamada matriz de rigidez condensada.

$[K_{rr}]$: submatriz cuadrada asociada a los grados de libertad restringidos (*restrained*).

$[K_{fr}], [K_{rf}]$: submatrices rectangulares que representan el acoplamiento entre los grados de libertad restringidos y no-restringidos.

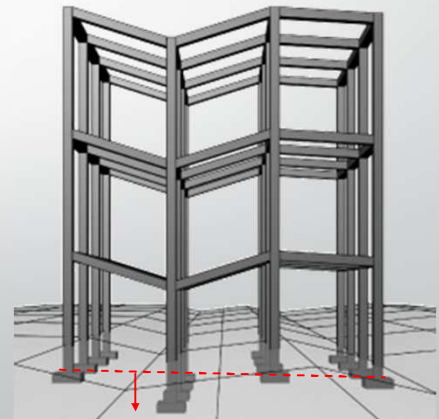
$\{F_f\}, \{F_r\}$: vector de cargas nodales y de reacciones, respectivamente.

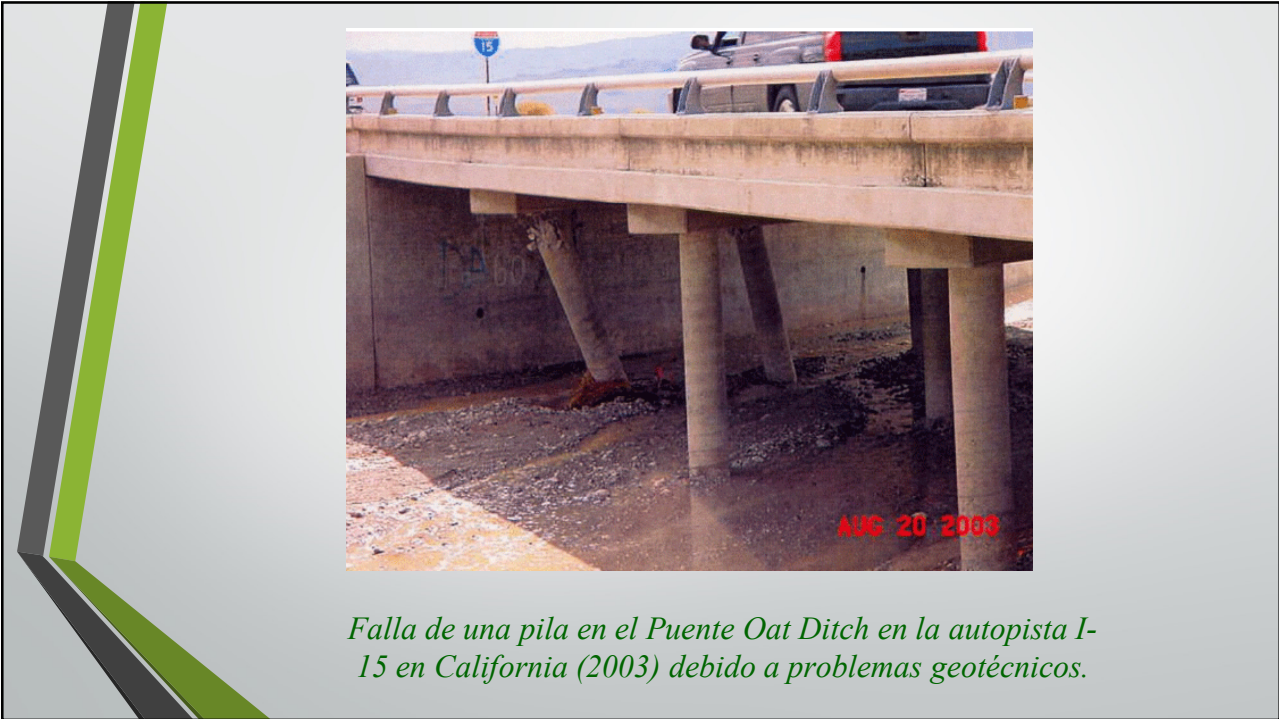
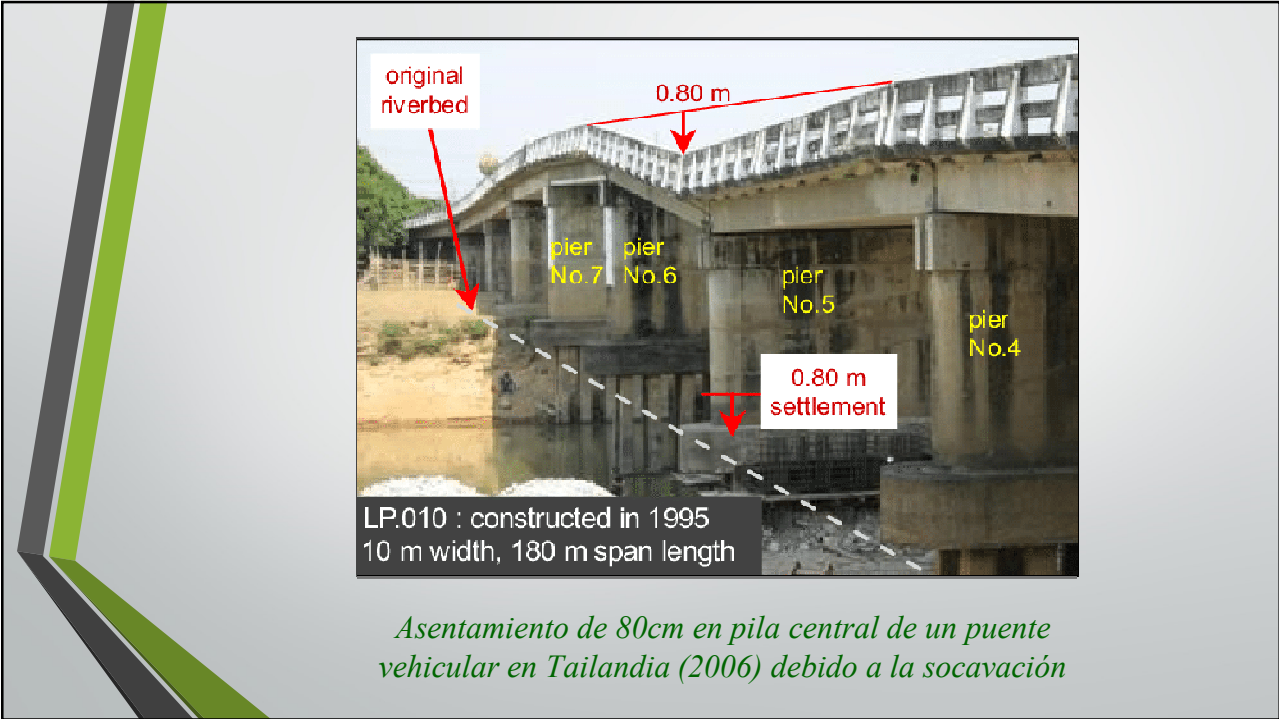
$\{D_f\}, \{D_r\}$: vector de desplazamientos asociados a g.d.l. no-restringidos y restringidos, respectivamente.

Por lo tanto, una estrategia muy usual (y que favorece la programación en un lenguaje de cómputo) es numerar primeramente los grados de libertad libres.

Un caso interesante de estudiar ocurre cuando los apoyos experimentan movimientos que en principio no estaban estipulados. En tal caso, el vector $\{D_r\}$ contiene valores distintos de cero.

Ejemplos de los anterior son los asentamientos y/o rotaciones en las fundaciones de un edificio o puente debido a fenómenos de socavación o licuefacción.





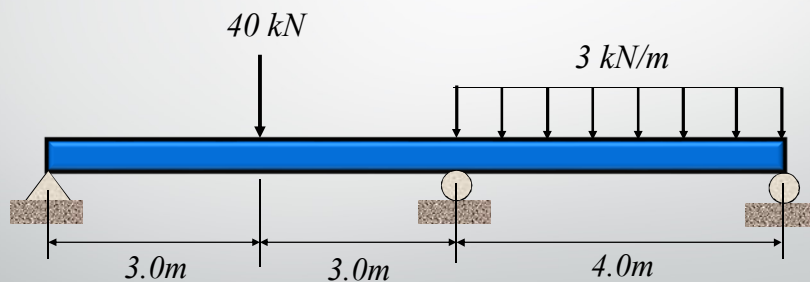
La ecuación matricial anterior, se puede descomponer en dos ecuaciones separadas para su solución:

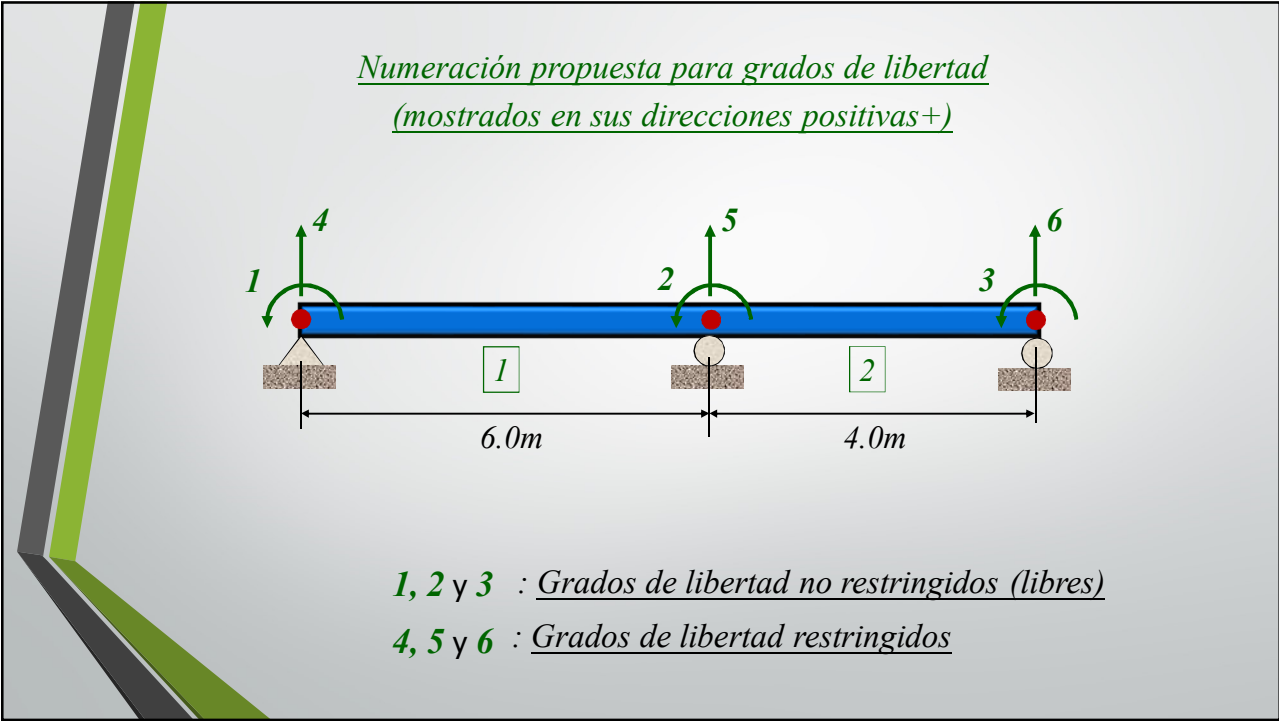
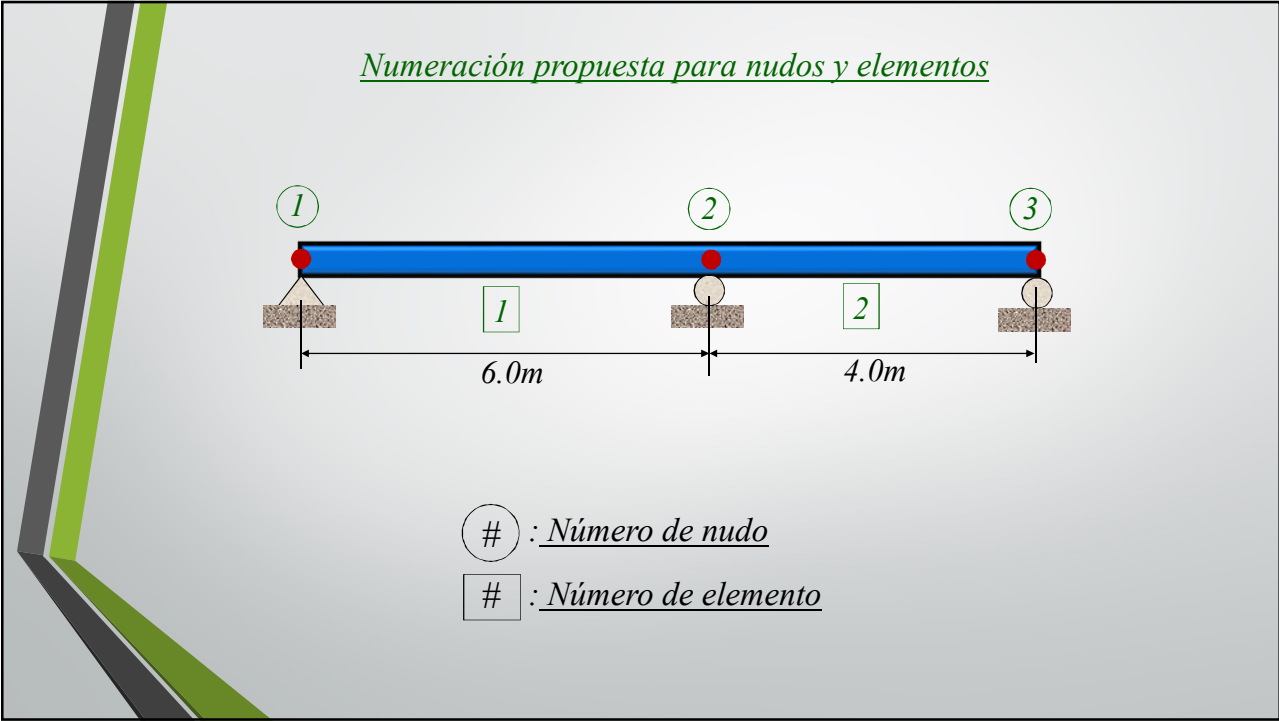
$$\begin{aligned} \{F_f\} &= [K_{ff}] \{D_f\} + [K_{fr}] \{D_r\} & \{D_f\} &= [K_{cond}]^{-1} (\{F_f\} - [K_{fr}] \{D_r\}) \\ \{F_r\} &= [K_{rf}] \{D_f\} + [K_{rr}] \{D_r\} \end{aligned}$$

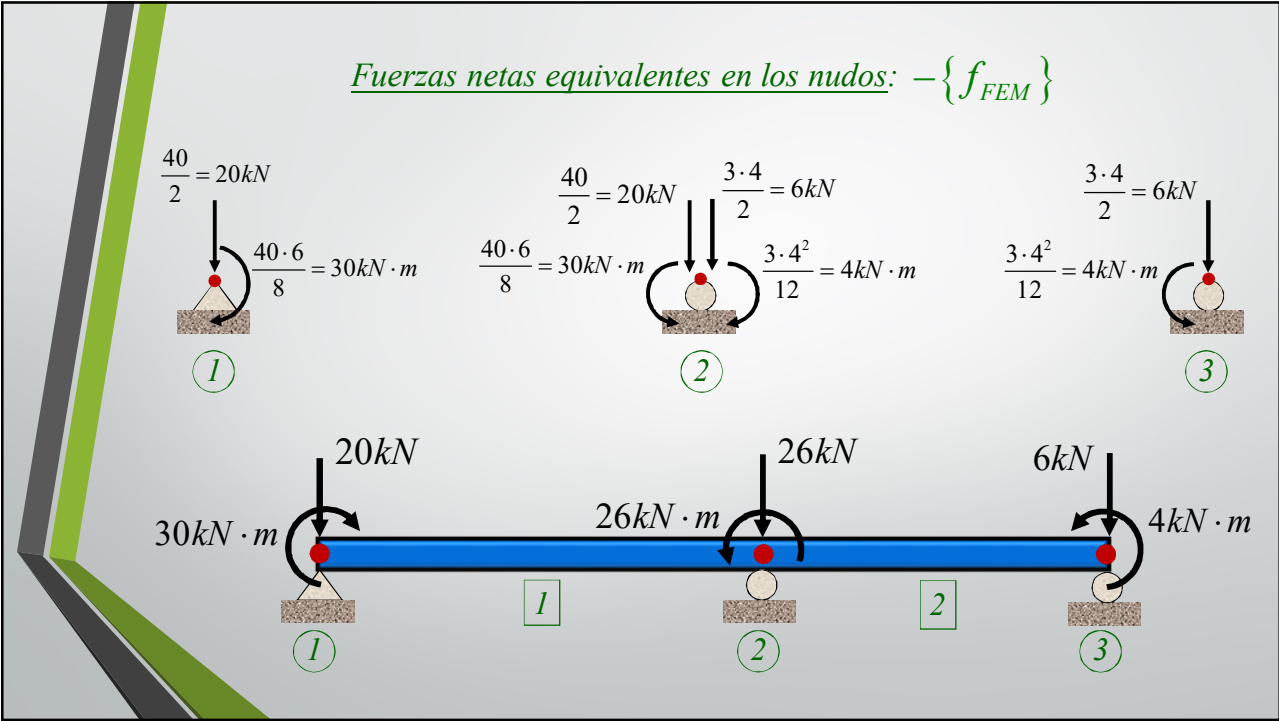
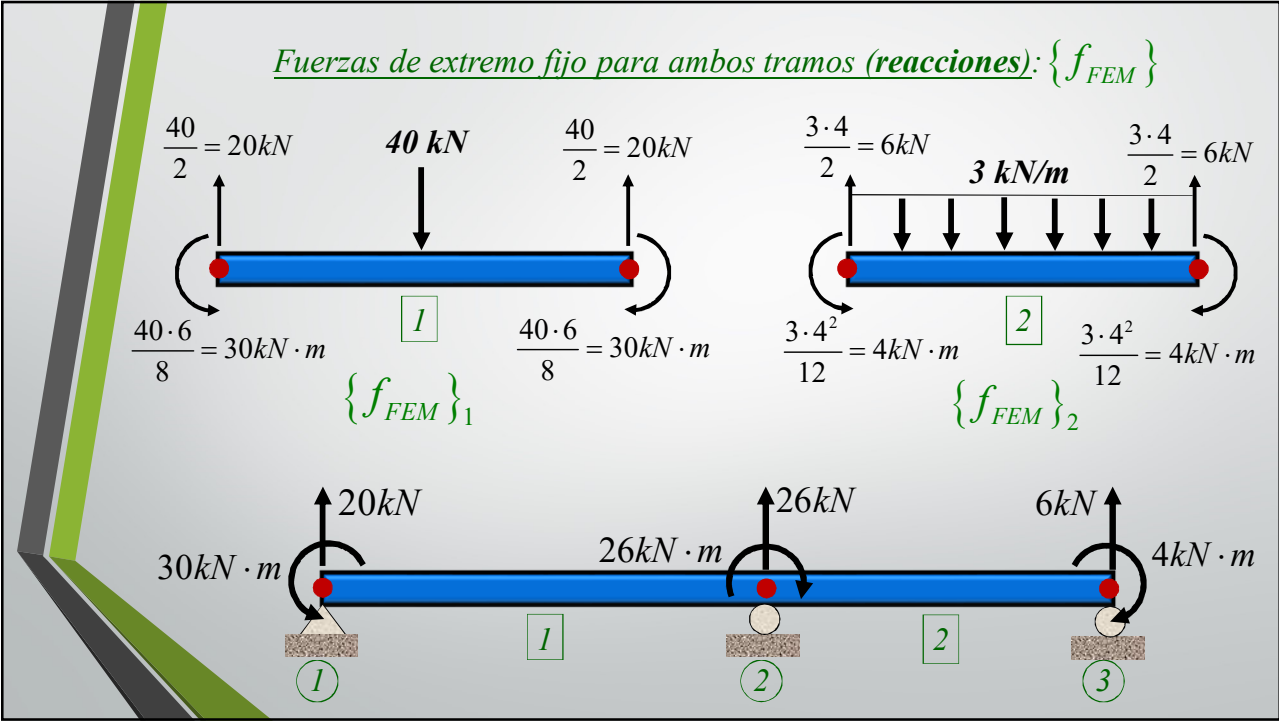
$$\{D_f\} = [K_{cond}]^{-1} \{F_f\}$$

Semana 6 Ejemplo 1: Análisis de una viga continua

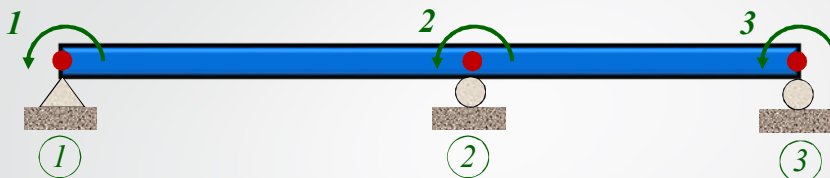
Calcular las reacciones y rotaciones en los apoyos así como los diagramas de cortante V y momento M para la viga mostrada. Suponga $EI=1$ (constante).
Nota: Ignorar el peso del perfil.







Considerando únicamente los grados de libertad no restringidos (1, 2 y 3) que corresponden a las rotaciones de los nudos ①, ② y ③ respectivamente, se tiene:



Los vectores de fuerzas y desplazamientos globales serán entonces:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30kN \cdot m \\ 26kN \cdot m \\ 4kN \cdot m \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Número de grado de libertad} \\ \downarrow \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Con respecto a la matriz de rigidez global, ésta se ensambla a partir de las matrices de los tramos individuales.

$$[k]_1 = \frac{EI}{216} \begin{matrix} \begin{matrix} 4 & 1 & 5 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 12 & 36 & -12 & 36 \\ 36 & 144 & -36 & 72 \\ -12 & -36 & 12 & -36 \\ 36 & 72 & -36 & 144 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Número de grado de libertad} \\ \downarrow \\ \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[k]_2 = \frac{EI}{64} \begin{matrix} \begin{matrix} 5 & 2 & 6 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 12 & 24 & -12 & 24 \\ 24 & 64 & -24 & 32 \\ -12 & -24 & 12 & -24 \\ 24 & 32 & -24 & 64 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[K]_{cond} = EI \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Por lo tanto, para la viga en términos globales, la ecuación matricial se plantea:

$$\{F\} = [K]_{cond} \{D\}$$

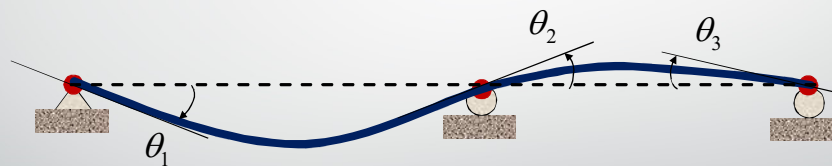
$$\begin{Bmatrix} -30 \\ 26 \\ 4 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Y dado que esta matriz de rigidez es no singular, los desplazamientos no restringidos (en este ejemplo rotaciones) se calculan mediante:

$$\{D\} = [K]_{cond}^{-1} \{F\}$$

Número de grado de libertad

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -60.6 \\ 31.2 \\ -11.6 \end{Bmatrix} \text{ rad}$$



----- Viga sin deformar (*Undeformed shape*)

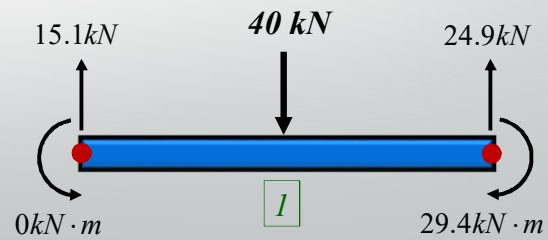
————— Viga deformada o curva elástica (*Deformed shape*)

Posteriormente se calculan las fuerzas en los extremos de cada tramo de la viga de la siguiente manera:

$$\{f\}_1 = [k]_1 \{d\}_1 + \{f_{FEM}\}_1$$

$$\{f\}_1 = \frac{EI}{216} \begin{pmatrix} 12 & 36 & -12 & 36 \\ 36 & 144 & -36 & 72 \\ -12 & -36 & 12 & -36 \\ 36 & 72 & -36 & 144 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 0 \\ -60.6 \\ 0 \\ 31.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\{f\}_1 = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 0 \\ 24.9 \\ -29.4 \end{pmatrix} \begin{matrix} kN & 4 \\ kN \cdot m & 1 \\ kN & 5 \\ kN \cdot m & 2 \end{matrix}$$

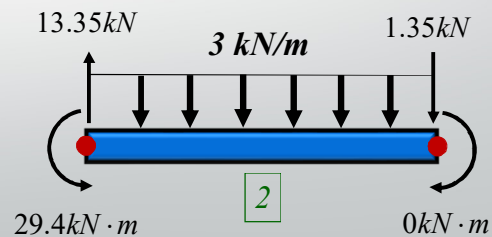


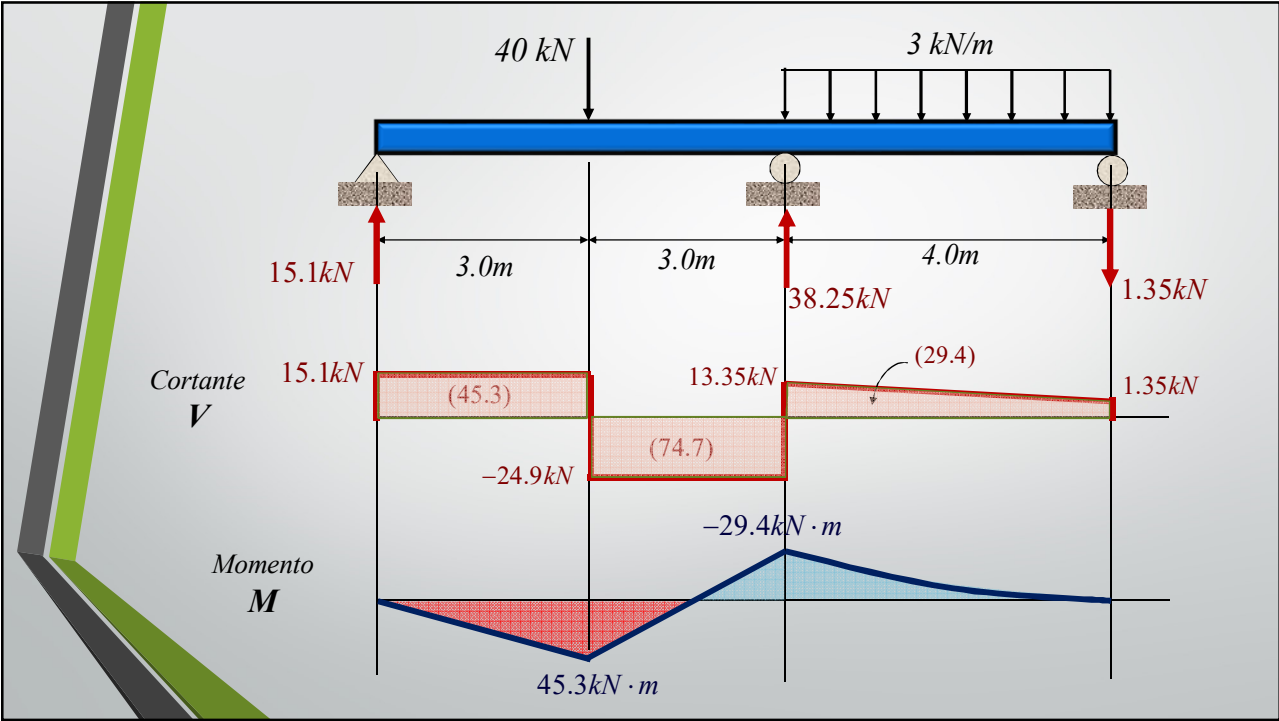
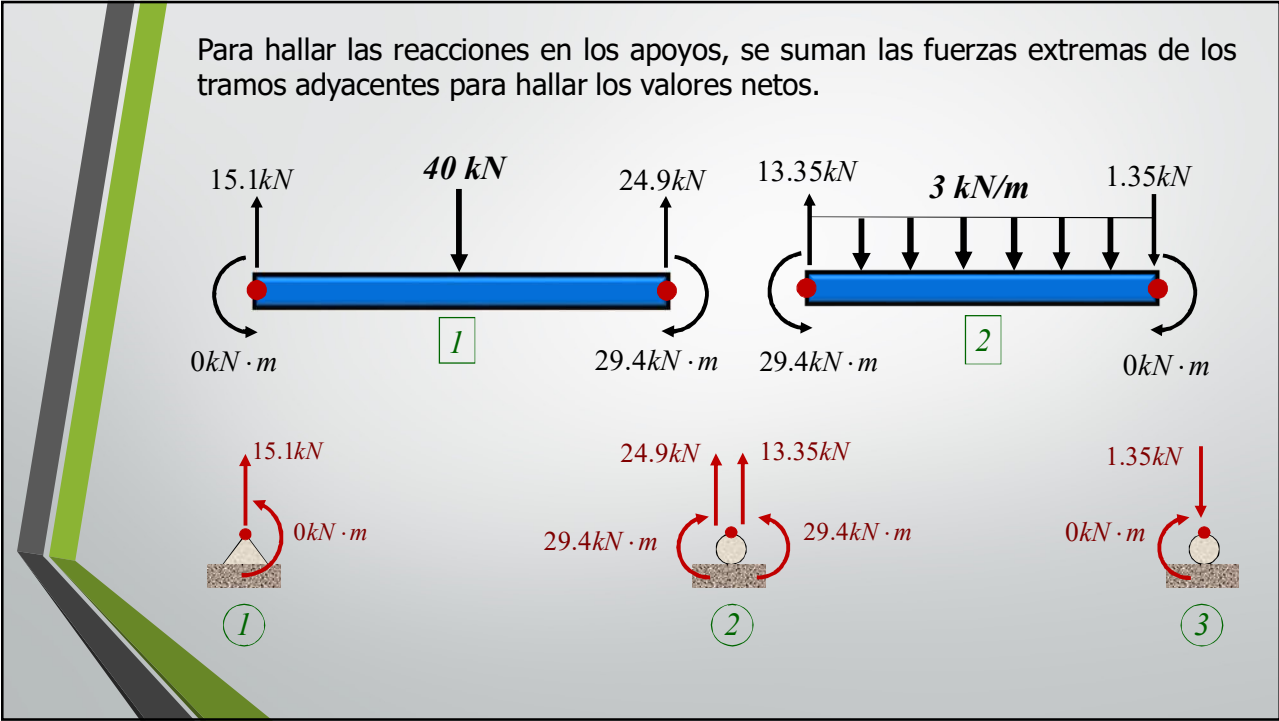
En forma análoga para el tramo derecho:

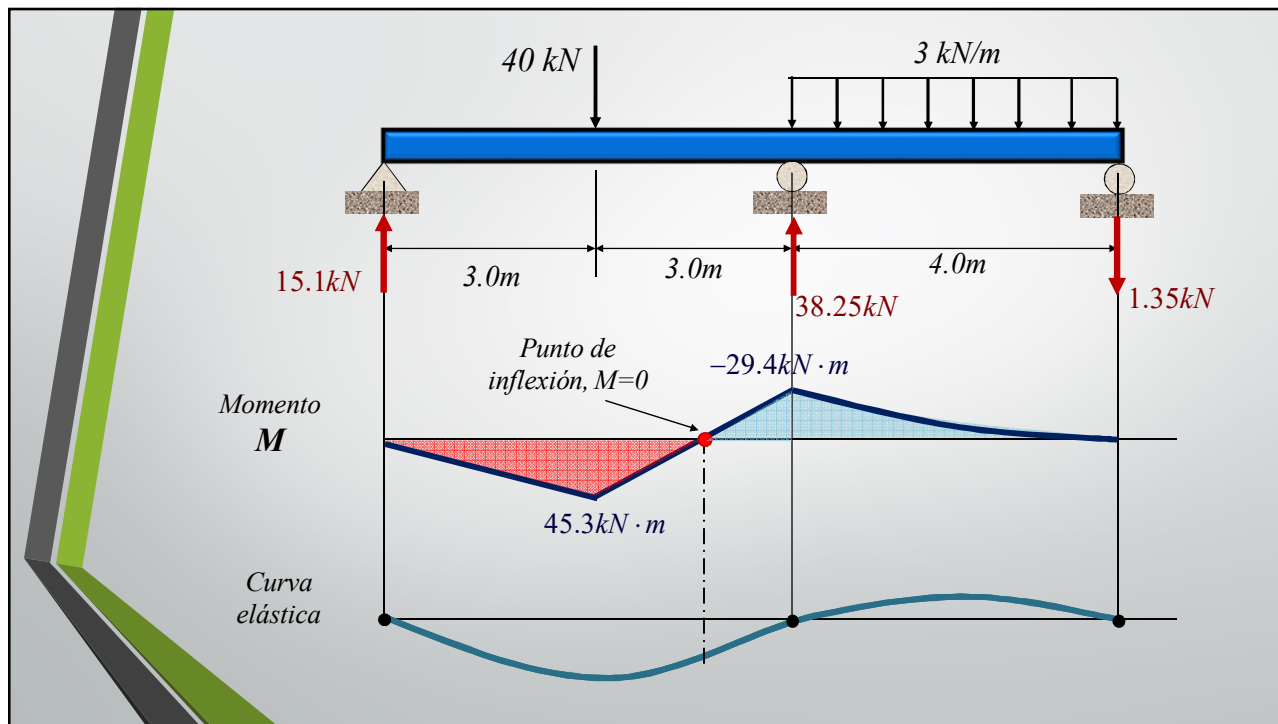
$$\{f\}_2 = [k]_2 \{d\}_2 + \{f_{FEM}\}_2$$

$$\{f\}_2 = \frac{EI}{64} \begin{pmatrix} 12 & 24 & -12 & 24 \\ 24 & 64 & -24 & 32 \\ -12 & -24 & 12 & -24 \\ 24 & 32 & -24 & 64 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 0 \\ 31.2 \\ 0 \\ -11.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\{f\}_2 = \begin{pmatrix} 13.35 \\ 29.4 \\ -1.35 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} kN & 5 \\ kN \cdot m & 2 \\ kN & 6 \\ kN \cdot m & 3 \end{matrix}$$








Alternativamente, las fuerzas reactivas pueden hallarse con la expresión:

$$\{F\}_G = [K]_G \{D\}_G + \{F_{FEM}\}_G$$

Matriz de rigidez global
(de la viga completa)

$$[K]_G = EI \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} & \frac{-3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{-3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{18} & \frac{-1}{18} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{5}{24} & \frac{3}{8} & \frac{-1}{18} & \frac{35}{144} & \frac{-3}{16} \\ 0 & \frac{-3}{8} & \frac{-3}{8} & 0 & \frac{-3}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

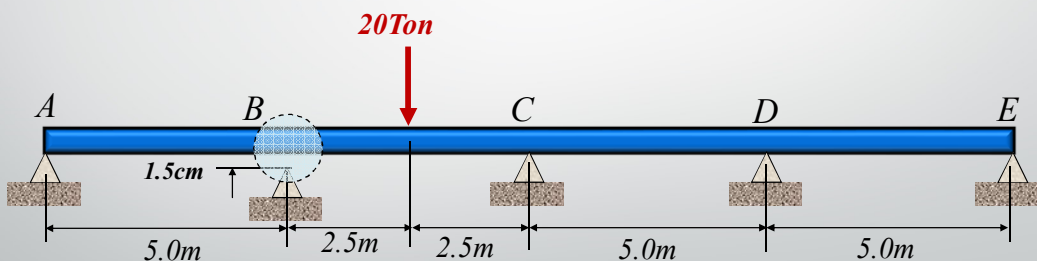


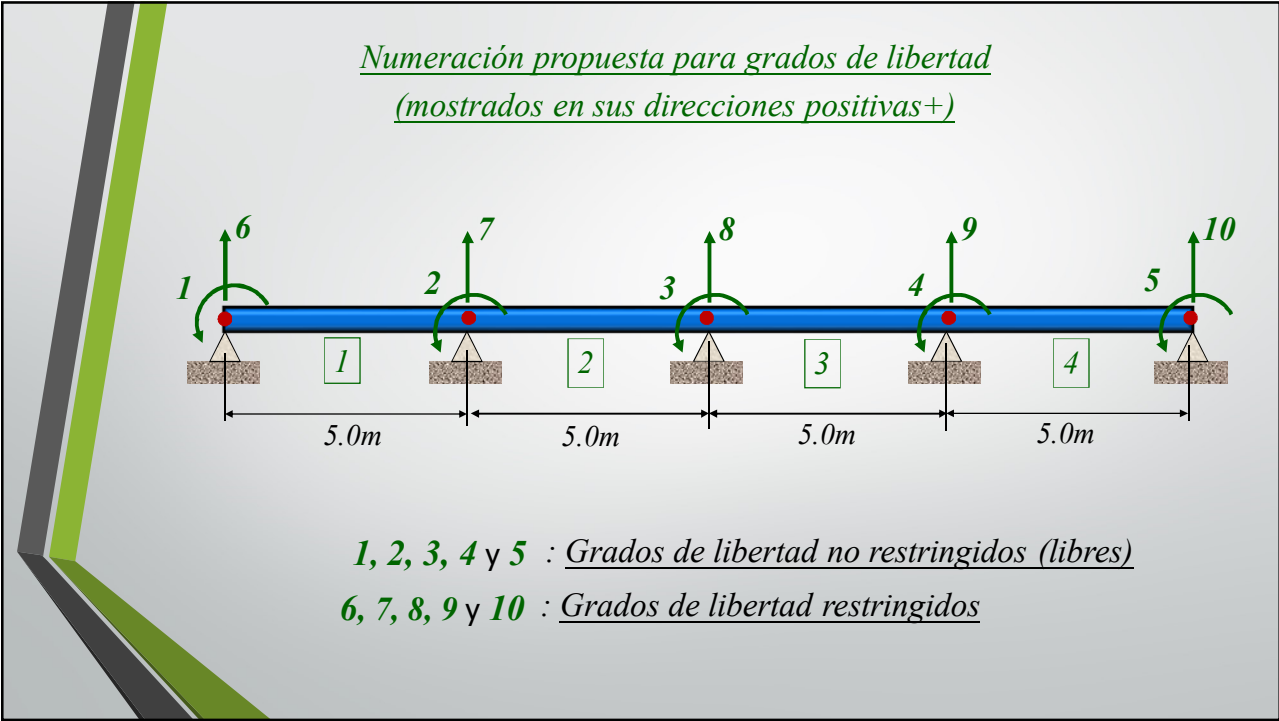
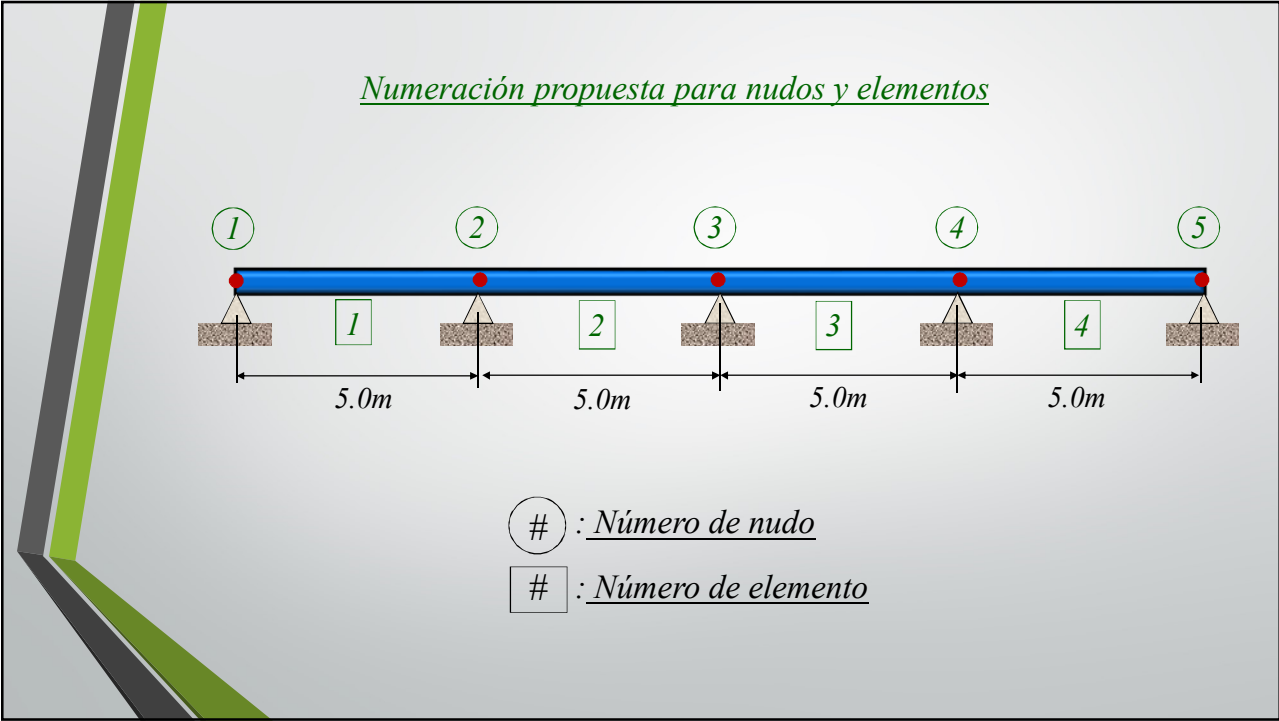
$$\{D\} = EI \begin{Bmatrix} -60.6 & \text{rad } 1 \\ 31.2 & \text{rad } 2 \\ -11.6 & \text{rad } 3 \\ 0 & \text{m } 4 \\ 0 & \text{m } 5 \\ 0 & \text{m } 6 \end{Bmatrix} \quad \{F_{FEM}\} = \begin{Bmatrix} 30 & \text{kN*m } 1 \\ -26 & \text{kN*m } 2 \\ -4 & \text{kN*m } 3 \\ 20 & \text{kN } 4 \\ 26 & \text{kN } 5 \\ 6 & \text{kN } 6 \end{Bmatrix}$$

Vector de desplazamientos global *Vector de fuerzas de extremo fijo*

Semana 7 Ejemplo 1: Análisis de una viga continua con asentamiento en un apoyo

Calcular las reacciones en los apoyos de la viga de puente mostrada. Posteriormente, rehacer el ejercicio suponiendo que la pila **B** se asentó 1.5cm. Compare y comente. Considere $EI=3.42 \times 10^4 \text{ Ton-m}^2$. Nota: Ignorar el peso propio de la viga.





Como todos los tramos poseen los mismos valores de E , I y L sus matrices son idénticas:

$$[k]_1 = \frac{3.42 \times 10^4}{125} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{2} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 12 & 30 & -12 & 30 \\ 30 & 100 & -30 & 50 \\ -12 & -30 & 12 & -30 \\ 30 & 50 & -30 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \end{matrix}$$

$$[k]_2 = \frac{3.42 \times 10^4}{125} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{3} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 12 & 30 & -12 & 30 \\ 30 & 100 & -30 & 50 \\ -12 & -30 & 12 & -30 \\ 30 & 50 & -30 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{3} \end{matrix}$$

$$[k]_3 = \frac{3.42 \times 10^4}{125} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 12 & 30 & -12 & 30 \\ 30 & 100 & -30 & 50 \\ -12 & -30 & 12 & -30 \\ 30 & 50 & -30 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{4} \end{matrix}$$

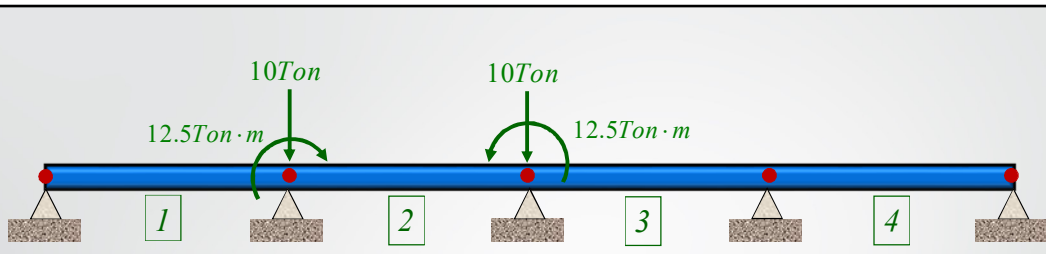
$$[k]_4 = \frac{3.42 \times 10^4}{125} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{10} & \mathbf{5} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 12 & 30 & -12 & 30 \\ 30 & 100 & -30 & 50 \\ -12 & -30 & 12 & -30 \\ 30 & 50 & -30 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{5} \end{matrix}$$

Con base en la matrices individuales, se ensambla la matriz global asociada únicamente de los grados de libertad libres.

$$[K]_{ff} \equiv [K]_{cond} = \frac{3.42 \times 10^4}{125} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 100 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 200 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 200 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 200 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{matrix}$$

Fuerzas de extremo fijo para cada tramo (reacciones): $\{f_{FEM}\}$

$$\{f_{FEM}\}_1 = \{f_{FEM}\}_3 = \{f_{FEM}\}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{f_{FEM}\}_2 = \begin{Bmatrix} 10 \\ 12.5 \\ 10 \\ -12.5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{Ton} \\ \text{Ton}^*m \\ \text{Ton} \\ \text{Ton}^*m \end{matrix}$$



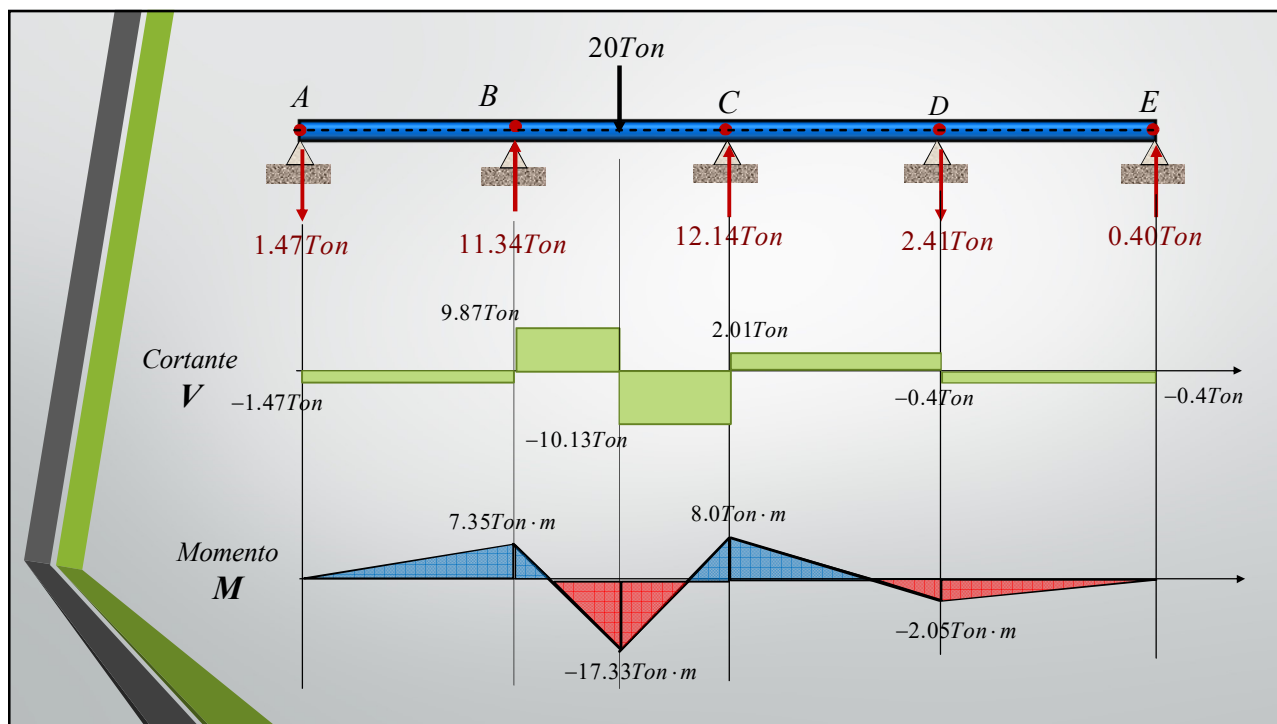
El gráfico anterior permite construir el vector de fuerzas nodales equivalentes, cuyos valores provienen del segmento **2** al ser el único tramo cargado. Considerando únicamente los grados de libertad no restringidos:

$$\{F_f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -12.5 \\ 12.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Ton}\cdot\text{m} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Escenario I: Viga sin asentamientos.

Se sustituyen los valores obtenidos previamente:

$$\{D_f\} = [K_{ff}]^{-1} \{F_f\} = \begin{Bmatrix} 0.0001795 \\ -0.0003590 \\ 0.0003427 \\ -0.0000979 \\ 0.0000490 \end{Bmatrix} \text{ rad} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$



Escenario II: Asentamiento de 1.5cm en la pila **B**.

Como las propiedades geométricas (**I** y **L**) de ningún tramo se vieron modificadas, tanto las matrices individuales como la global se conservan para este escenario.

Con respecto al vector de desplazamientos:

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} \{D_f\} \\ \{D_r\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_1 & rad & 1 \\ \theta_2 & rad & 2 \\ \theta_3 & rad & 3 \\ \theta_4 & rad & 4 \\ \theta_5 & rad & 5 \\ 0 & m & 6 \\ -0.015 & m & 7 \\ 0 & m & 8 \\ 0 & m & 9 \\ 0 & m & 10 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{D_f\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} \text{ rad } \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Asentamiento de 1.5cm

$$\{D_r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.015 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m } \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Reacciones netas. A cada una de estas reacciones se les reduce las 10 Ton que corresponden a las cargas nodales equivalentes en esos puntos

0	Ton*m	1
-12.5	Ton*m	2
12.5	Ton*m	3
0	Ton*m	4
0	Ton*m	5
R_A	Ton	6
$R_B - 10$	Ton	7
$R_C - 10$	Ton	8
R_D	Ton	9
R_E	Ton	10

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_f\} \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -12.5 \\ 12.5 \\ 0 \\ 0 \\ R_A \\ R_B - 10 \\ R_C - 10 \\ R_D \\ R_E \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ff} & K_{fr} \\ K_{rf} & K_{rr} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} D_f \\ D_r \end{Bmatrix} \Rightarrow \{F_f\} = [K_{ff}]\{D_f\} + [K_{fr}]\{D_r\}$$

Como esta vez el vector de desplazamientos restringidos $\{D_r\}$ es diferente de cero, se tiene que:

$$\{D_f\} = [K_{ff}]^{-1} (\{F_f\} - [K_{fr}]\{D_r\})$$

Al resolver esta ecuación matricial se obtiene:

$$\{D_f\} = \begin{Bmatrix} -0.004642 \\ 0.000284 \\ 0.002593 \\ -0.000741 \\ 0.00037 \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

