Universidad Latina de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Civil
Análisis Estructural II (LIC 39)

Prof.: Ing. Ronald Jiménez Castro
III Cuatrimestre, 2022

Profesor: Ing. Ronald Jiménez Castro

ronald.jimenez1@ulatina.net

www.rojica.jimdo.com

https://t.me/joinchat/F3I5JulDpDaG14du

Nombre del equipo: **ANÁLISIS ESTRUCTURAL II (H y SP)**

Semana 1

✓ Discusión del Programa del curso

Objetivo general

Analizar el método de la rigidez y métodos numéricos para su aplicación en el cálculo de los desplazamientos de traslación o rotación en cualquier punto de una estructura de mediana complejidad, así como para la elaboración de sus diagramas de fuerzas internas.

Contenidos

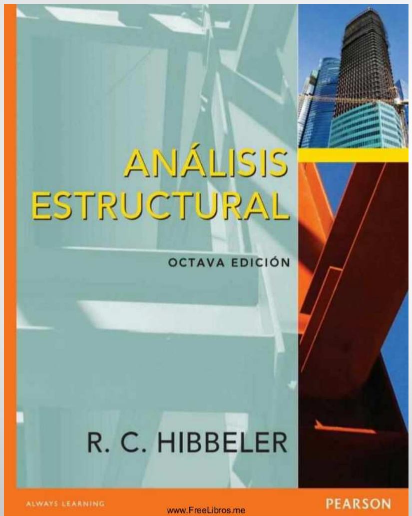
TEMA I. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE RIGIDEZ
TEMA II. ARMADURAS
TEMA III. ELEMENTOS TIPO VIGA
TEMA IV. MARCOS PLANOS Y MALLAS
TEMA V. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS POR MEDIO DEL SAP2000

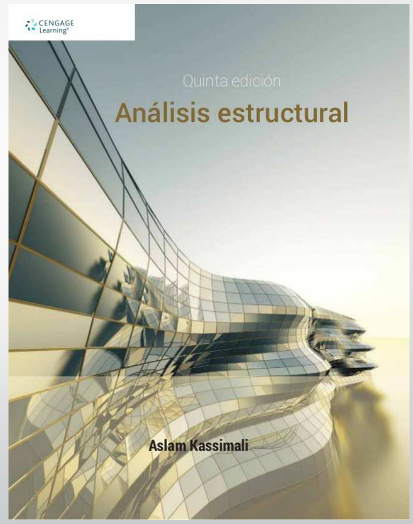
Evaluación

- Tareas y quices (20%)
- Primer Parcial (25%): Semana 8 (1 noviembre)
- Proyecto grupal (25%): Semana 14 (13 diciembre)
- Segundo Parcial (30%): Semana 15 (20 diciembre)

Bibliografía

- Hibbeler, R.C. **Análisis Estructural**. Pearson Education. 8va edición. 2012.
- Kassimali, Aslam. **Análisis Estructural.** Cengage Learning. 5ta Edición. 2015.





Cronograma

<table>
<tr><th>Semana</th><th>Contenido / Evaluación</th></tr>
<tr><td>No. 1</td><td>Introducción. Tema I.</td></tr>
<tr><td>No. 2</td><td>Tema I</td></tr>
<tr><td>No. 3</td><td rowspan="2">Tema II</td></tr>
<tr><td>No.4</td></tr>
<tr><td>No.5</td><td rowspan="3">Tema III</td></tr>
<tr><td>No.6</td></tr>
<tr><td>No.7</td></tr>
<tr><td>No.8</td><td>Primer examen parcial (1 noviembre)</td></tr>
</table>

Semana	Contenido / Evaluación
No. 9	Tema IV
No. 10	
No. 11	
No. 12	Tema V
No. 13	
No. 14	Repaso general / **Entrega Proyecto Grupal (13 diciembre)**
No. 15	**Segundo examen parcial (20 diciembre)**

✓ Enfoque por Atributos

¿Qué son los Atributos?

"Conjunto de resultados individuales evaluables, de los componentes indicativos del potencial del graduado para adquirir la competencia para la práctica profesional" Washington Accord, 2015.

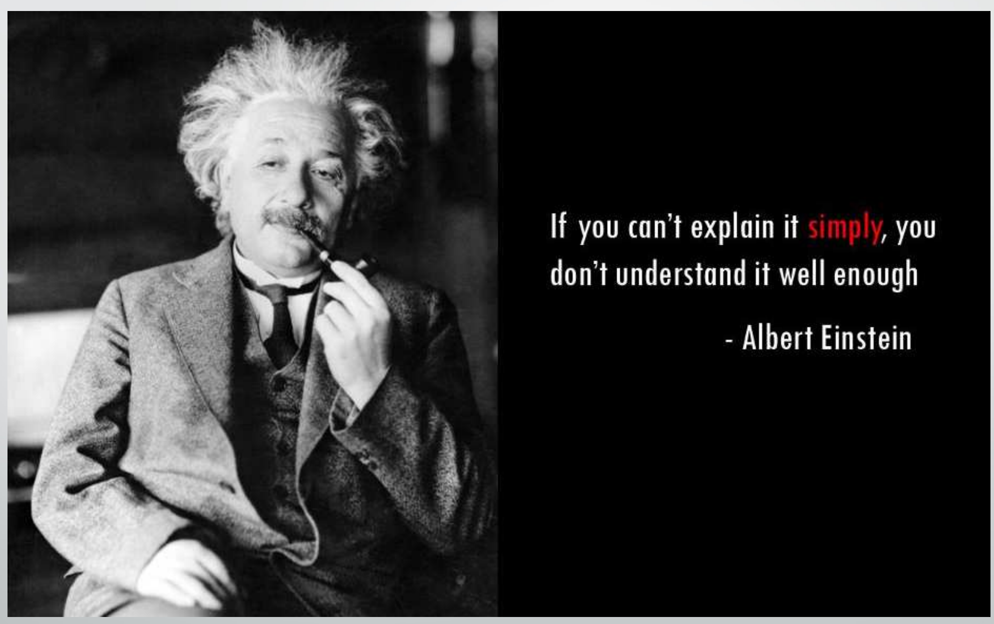
Atributos asociados al curso:

Atributo	Nivel
Análisis de problemas	Avanzado
Utilización de herramientas modernas de Ingeniería	Avanzado
Comunicación	Intermedio

"***Análisis de problemas**: Capacidad para utilizar los conocimientos y habilidades para identificar, formular, investigar en la literatura, analizar y resolver problemas complejos de Ingeniería, logrando conclusiones sustanciales , utilizando principios de Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias de la Ingeniería."*

"***Utilización de herramientas modernas de Ingeniería**: Capacidad para crear, seleccionar, aplicar, adaptar y ampliar apropiadamente técnicas, recursos y herramientas modernas de Ingeniería y de Tecnologías de la Información, incluyendo la prospección y modelado de problemas complejos de Ingeniería, con la comprensión de las limitaciones asociadas."*

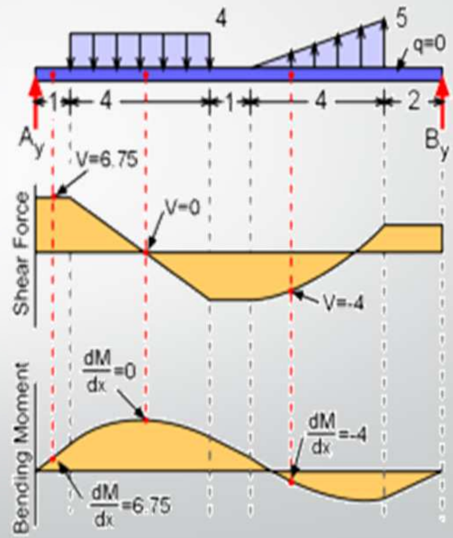
"***Comunicación**: Capacidad para comunicar conceptos complejos de Ingeniería dentro de la profesión y con la sociedad en general. Estas habilidades incluyen: la habilidad de comprender y escribir efectivamente informes, documentación de diseños, realizar presentaciones efectivas, dar y responder instrucciones claras. Es conveniente incentivar la capacidad de comunicarse en un segundo idioma."*



Introducción

El Análisis Estructural es la predicción del desempeño de una estructura ante cargas prescritas y/o efectos externos, tales como movimientos en los apoyos y cambios de temperatura.

Para efectos del Diseño Estructural, los parámetros de mayor interés son: fuerzas internas (axial, cortante y momento), deflexiones y reacciones en los apoyos.

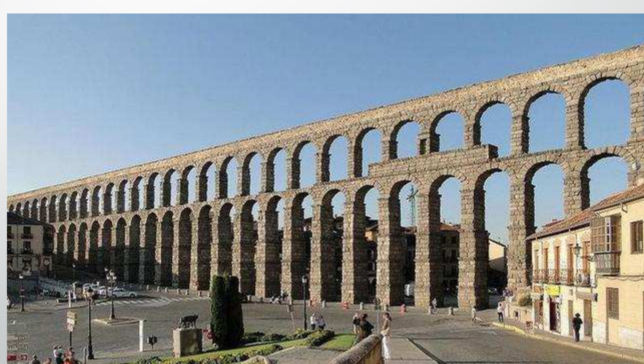


Antecedentes históricos

Se considera que a mediados del siglo XVII, se empezó a aplicar el conocimiento de la mecánica (matemáticas y ciencias) en el cálculo de estructuras.

Previamente, éstas fueron diseñadas a prueba y error usando reglas empíricas basadas fundamentalmente en experiencias previas.

Acueducto de Segovia (Construcción: Entre la segunda mitad del Siglo I y principios del II)



Catedral de Milán (Inicio construcción: 1386)

Galileo Galilei (*1564-1642*) es considerado como el iniciador de la teoría de las estructuras. En su libro *"Dos nuevas ciencias"* (*1638*), analizó la falla de un tipo de estructuras simples, incluyendo una viga en voladizo (aunque con algunos errores conceptuales).

Ejemplo ilustrativo del problema básico que abordó Galileo, la resistencia de una viga en voladizo.

El avance de la Mecánica Estructural continuó durante el resto del siglo XIX y la primera mitad del XX, en los que se desarrolló la mayoría de los métodos clásicos de análisis estructural.

En esta etapa destaca Hardy Cross quien en 1924, desarrolló el Método de la Distribución de Momentos con el cual fue posible el diseño de los primeros rascacielos.

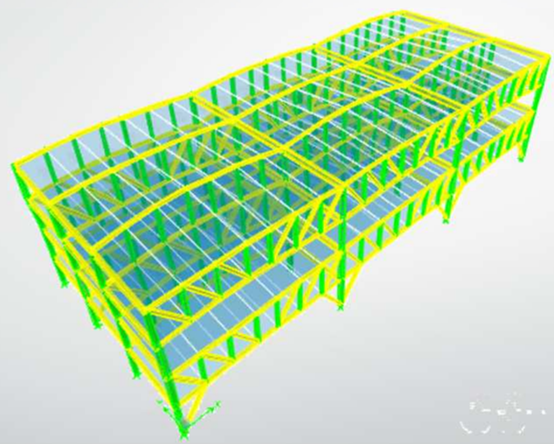
Empire State (Nueva York)
(Construcción 1930-1931)

Los cimientos teóricos para de los métodos matriciales en el análisis de estructuras se le atribuyen a James C. Maxwell (quien en *1864* introdujo el Método de las Deformaciones Consistentes) y en George A. Maney quien desarrolló el Método de Pendiente-Deflexión.

De hecho, estos métodos se consideran los precursores de los métodos matriciales de *Flexibilidad* (S. Levy, *1947*) y *Rigidez* (R. K. Livesley, 1954) respectivamente. En la época "pre-computadoras", la principal desventaja era que requerían la resolución de múltiples ecuaciones simultáneas de forma manual.

La invención de las computadoras a finales de la década de *1940*, revolucionó sin duda el Análisis Estructural. Loa anterior debido a que se puede resolver grandes cantidades de sistemas de ecuaciones simultáneas y los análisis que antes tomaban varios días o incluso semanas, ahora se ejecutan en segundos.

En *1956*, M.T. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J Topp, introdujeron el *Método de Rigidez Directo*, ampliamente utilizado hoy en día y que es la base de múltiples programas comerciales.



Animación por computadora de la deformación por carga gravitacional de un edificio con estructura a base de armaduras

Métodos de Flexibilidad y de Rigidez

Se pueden usar dos métodos para el análisis matricial de estructuras: *Método de Flexibilidad* y *Método de Rigidez* .

- El *Método de Flexibilidad* (también llamado Método de las Fuerzas) es esencialmente una generalización en forma matricial del método clásico de las Deformaciones Consistentes en el cual las principales incógnitas son las fuerzas redundantes. Éstas fuerzas se calculan resolviendo las ecuaciones que surgen de la compatibilidad de la estructura. Una vez que se obtienen estas fuerzas, se calculan los desplazamientos mediante las ecuaciones de equilibrio y las relaciones fuerza-desplazamiento apropiadas.

- *Método de Rigidez* (también llamado Método de los Desplazamientos) tiene su origen en el método clásico de Pendiente-Deflexión.

  En este caso, las incógnitas son los desplazamientos en los nodos que se calculan a través de las ecuaciones de equilibrio de la estructura. Posteriormente, se hallan las fuerzas desconocidas mediante los criterios de compatibilidad y de relación fuerza-deformación.

En este curso se estudiará únicamente el Método de Rigidez por su facilidad para ser implementado en rutinas de cómputo.

A modo de resumen, la siguiente tabla establece una comparación entre ambos métodos:

	Método de Flexibilidad	**Método de Rigidez**
Incógnitas	Fuerzas redundantes	Desplazamientos nodales
Ecuaciones	De compatibilidad geométrica en las “liberaciones”	De equilibrio en los nodos
Bases para describir la estructura en las ecuaciones	Coeficiente de flexibilidad (desplazamientos causados por fuerzas unitarias)	Coeficiente de rigidez (fuerzas causados por desplazamientos unitarios)

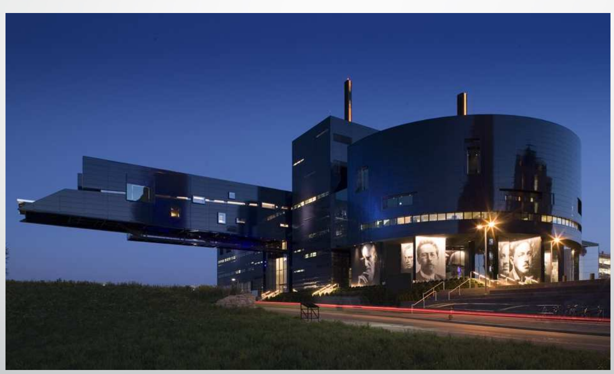
Métodos clásicos vs métodos matriciales:

Los métodos matriciales no aportan ningún nuevo principio fundamental de la estructuras. La diferencia básica con relación a los métodos clásicos es que las relaciones de equilibrio, compatibilidad y esfuerzo-deformación se expresan mediante ecuaciones matriciales. Esto permite que los cálculos numéricos se puedan efectuar eficientemente en una computadora.

La mayoría de los métodos clásicos fueron desarrollados para analizar un tipo particular de estructuras y dado que los cálculos eran manuales, a menudo debían partir de ciertas suposiciones de manera que se redujera el número de variables y/o ecuaciones.

Un ejemplo muy evidente de lo anterior es el Método de Distribución de Momentos que aplica para vigas y marcos con deformaciones por flexión únicamente, se desprecian las deformaciones axiales.

En contraste con los métodos clásico, los métodos matriciales son sistemáticos (pueden programarse) y generales (aplican para cualquier estructura tipo marco). Ésta última característica proporciona versatilidad, lo cual hace atractivos estos métodos: en un programa que analiza cerchas tridimensionales pueden modificarse ciertos parámetros para analizar una cercha bidimensional y viceversa.



Teatro Guthrie (Minneapolis, Estados Unidos)

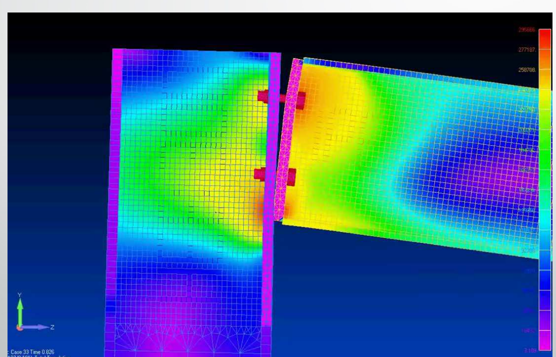
Métodos clásicos vs Método de Elemento Finito

Los métodos matriciales únicamente pueden ser usados para analizar estructuras tipo marco (*frame*). El *Método del Elemento Finito (MEF)*, aunque surgió como una herramienta para el análisis de estructuras de superficie (placas, losas y muros), se ha extendido para ser aplicado a casi cualquier tipología estructural.

Desde el punto de vista teórico, la diferencia básica entre los dos métodos es que en métodos matriciales, las relaciones fuerza-desplazamiento para un elemento están basados en las soluciones exactas de ecuaciones diferenciales; mientras que en el Método de Elemento Finito, esas relaciones usualmente son aproximadas y se derivan de los Principios Trabajo-Energía de funciones de desplazamiento o esfuerzo asumidas.

Debido a la naturaleza aproximada de las relaciones fuerza-desplazamiento, el *MEF* conduce a soluciones aproximadas.

Sin embargo, como se verá más adelante en el curso, en el caso de análisis lineal de estructuras tipo marco compuestas de miembros prismáticos; ambos métodos conducen a resultados casi idénticos.

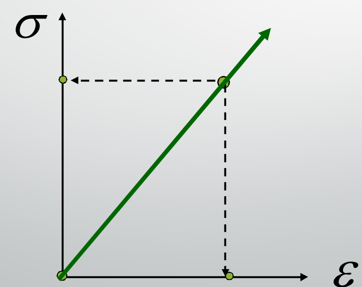


Modelo de Elementos Finitos en una conexión viga-columna de acero

TEMA I: FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE RIGIDEZ

El Método de Rigidez se basa en una serie de hipótesis que deben conocerse en detalle para no sólo aplicar de manera apropiada el método sino también para interpretar correctamente los resultados.

- ✓ Comportamiento elástico lineal: Se asume una relación lineal entre las cargas (fuerzas o momento) y desplazamientos (traslaciones o rotaciones).



Ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

- ✓ Pequeñas deformaciones: No se cuantifican los efectos de segundo orden como el llamado *Efecto P-Δ*.

- ✓ Equilibrio: Se deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \qquad \sum \vec{M} = \vec{0}$$

- ✓ Compatibilidad: Se refiere a la relación entre las reacciones en los apoyos y las deformaciones (desplazamientos y/o rotaciones) en esos puntos.

- ✓ Ecuaciones constitutivas: Establecen la relación entre las fuerzas en los elementos y las deformaciones en sus extremos (nodos).

A modo de resumen:

Las ecuaciones de compatibilidad relacionan las deformaciones de los elementos con los desplazamientos en los nodos.

Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones constitutivas, se asocian las fuerzas en los extremos con los desplazamientos nodales. Finalmente, al incluir estas últimas relaciones en las ecuaciones de equilibrio, se dispone de un conjunto de ecuaciones de las fuerzas en los nodos en términos de los desplazamientos nodales.

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener el valor de las incógnitas (desplazamientos nodales) a partir de los cuales se obtienen tanto las fuerzas internas en los elementos como las reacciones en sus apoyos.

Conceptos básicos

Antes de abordar matemáticamente la resolución de estructuras indeterminadas es conveniente establecer una serie de conceptos teóricos que se seguirán empleando:

- ✓ Nodo (nudo): En términos generales corresponden a los puntos donde convergen dos o más miembros estructurales. Sin embargo, más adelante se verá que igual se consideran nodos puntos donde un elemento presenta cambios de sección u orientación.
- ✓ Elemento: Componente de una estructura con propiedades geométricas y físicas que le permiten soportar cargas sin provocar inestabilidad global.
- ✓ Grado de libertad: Desplazamientos en los nudos independientes (traslaciones y/o rotaciones) que son necesarias para especificar la deformada de una estructura asociada a una carga arbitraria.

Definición de matriz de rigidez $[k]$ ó $[K]$

Para un elemento dado, la matriz de rigidez $[k]$ es una matriz tal que:

$$\{f\} = [k]\{d\}$$

que relaciona los desplazamientos nodales $\{d\}$ en coordenadas locales *(x', y', z')* con sus correspondientes fuerzas $\{f\}$.

Dicha definición pueden extrapolarse a una estructura de manera que la matriz de rigidez global $[K]$, es una matriz tal que:

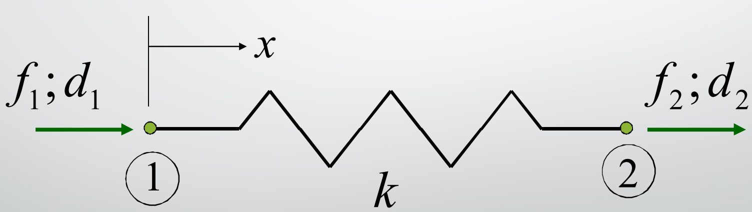
$$\{F\} = [K]\{D\}$$

que relaciona los desplazamientos nodales $[D]$, en coordenadas globales *(X, Y, Z)* con sus correspondientes fuerzas $[F]$.

Deducción de la matriz de rigidez para un elemento tipo *resorte*

Esta es la forma más básica del análisis de la rigidez de un elemento.

Considérese un resorte lineal cuya constante es ***k*** y que sólo puede moverse en dirección x; es decir, un solo grado de libertad por nodo.



Nota: Se muestran las fuerzas y los desplazamientos en dirección positiva (+)

La relación entre las fuerzas aplicadas en los extremos del resorte y los respectivos desplazamientos se expresa:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

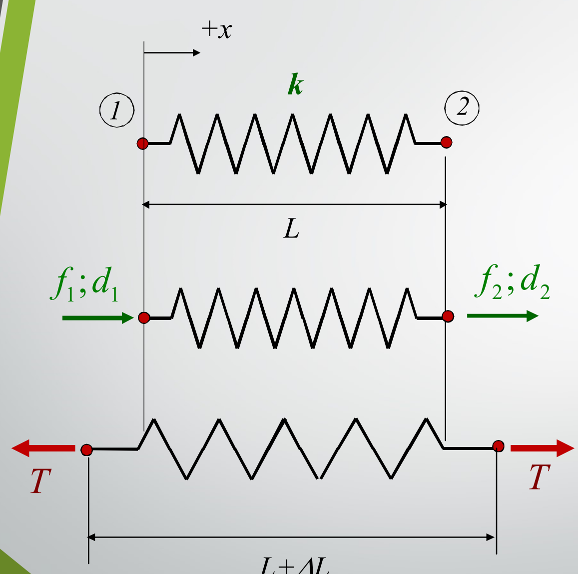
Empleando notación matricial:

$$\{f\} = [k]\{d\} \qquad (1)$$

$\{f\}_{mx1}$: Vector de fuerzas nodales (Tamaño $mx1$)

$[k]_{mxm}$: Matriz de rigidez del elemento (Tamaño mxm)

$\{d\}_{mx1}$: Vector de desplazamientos nodales (Tamaño $mx1$)



Ley de Hooke: $T = k \cdot \Delta L$

La elongación del resorte, en términos de los desplazamientos nodales está dada por: $\Delta L = d_2 - d_1$

$$T = k \cdot (d_2 - d_1) \Rightarrow \boxed{T = kd_2 - kd_1}$$

En el nudo 1: $f_1 = -T = -(kd_2 - kd_1)$

En el nudo 2: $f_2 = T = kd_2 - kd_1$

$$\begin{cases} f_1 = -T = kd_1 - kd_2 \\ f_2 = T = -kd_1 + kd_2 \end{cases}$$ *: Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas*

En notación matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}}_{\text{Vector de fuerzas nodales } \{f\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de rigidez } [k] \text{ (de un elemento tipo resorte)}} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}}_{\text{Vector de desplazamientos nodales } \{d\}}$$

$$\Rightarrow \{f\} = [k]\{d\}$$

La matriz de matriz de rigidez $[k]$ de un elemento tipo resorte lineal es:

$$[k] = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Es importante notar las propiedades de la matriz de rigidez $[k]$:

- ✓ Simétrica: Es decir: $k_{ij}=k_{ji}$.
- ✓ Cuadrada: El número de filas m es igual al número de columnas n.
- ✓ Singular: Su determinante es nulo por lo que la matriz no posee inversa. Esta característica se revierte cuando se incorporan las condiciones de borde.
- ✓ Diagonal principal positiva: Los términos de la diagonal son siempre positivos.

La derivación o deducción de la matriz de rigidez para diferentes tipos de elementos es probablemente la parte más compleja del Método. Sin embargo, una vez obtenida en su forma general, se pueden aplicar en cualquier estructura que contenga ese tipo de elemento.

Las vigas continuas de este puente pueden analizarse mediante métodos matriciales

Ensamblaje de matrices

Se define estructura como un conjunto de miembros unidos para soportar cargas. Bajo este concepto, en el análisis de una estructura (cercha, edificio, etc.) se requiere calcular la matriz de rigidez total o global $[K]$ que evidentemente se obtiene del aporte de la matriz de cada elemento individual $[k]^e$:

$$[K] = \sum_{e=1}^{N} [k]^{(e)}$$

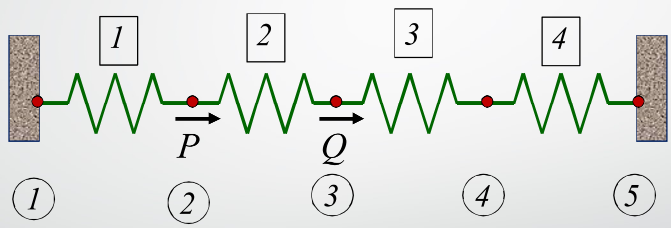
N: Número de elementos de la estructura

De hecho el procedimiento general establece que una vez hallada la matriz global, se imponen las condiciones de frontera (apoyos o restricciones) y se resuelven los desplazamiento nodales: $\{d\}$.

Finalmente, las fuerzas en los elementos se determinan aplicando la ecuación *(1)*.

Semana 1_Ejemplo 1: Cálculo de desplazamientos y fuerzas en un sistema de resortes

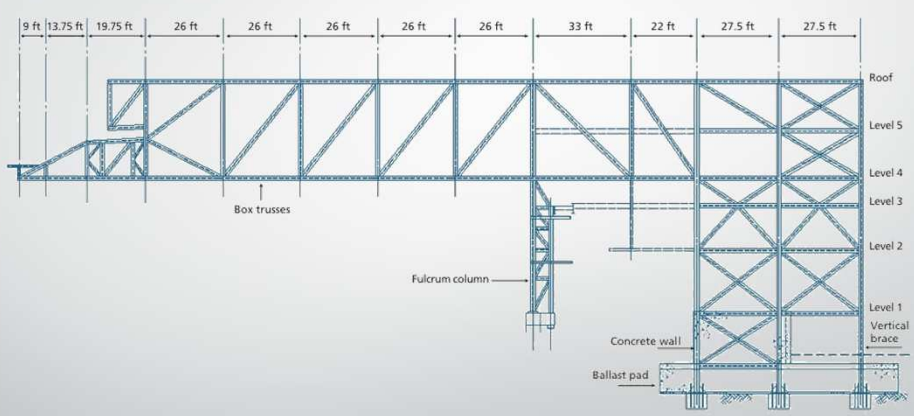
Determinar los desplazamientos nodales así como las reacciones en los apoyos (paredes).



Suponga: $k_1=612\ kg/cm$, $k_2=816\ kg/cm$, $k_3=1020\ kg/cm$ y $k_4=1224\ kg/cm$.

Las carga son $P=650\ kg$ y $Q=900\ kg$.

Universidad Latina de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Civil
Análisis Estructural II (LIC 39)



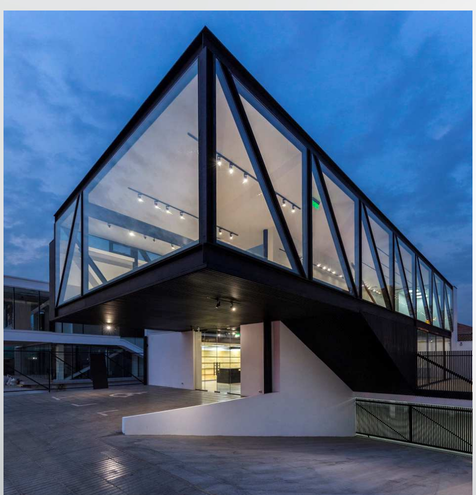
Prof.: Ing. Ronald Jiménez Castro
III Cuatrimestre, 2022

TEMA II: ARMADURAS

Las barras son elementos sujetos únicamente a fuerzas paralelas a su eje longitudinal (**carga axial**) que pueden ser de tensión o compresión. Para garantizar este comportamiento, las uniones entre barras no deben proporcionar resistencia a la rotación.

Su uso primordial es en estructuras tipo armadura tales como:

- ✓ Torres de transmisión eléctrica
- ✓ Cerchas de techo
- ✓ Cerchas de entrepiso
- ✓ Viguetas.
- ✓ Etc.



Las armaduras o cerchas son un recurso ampliamente utilizado como recurso arquitectónico en sectores en voladizo.

Deducción de la matriz de rigidez para una barra unidireccional

La derivación de la matriz de rigidez de un elemento tipo barra unidireccional contempla las siguientes hipótesis:

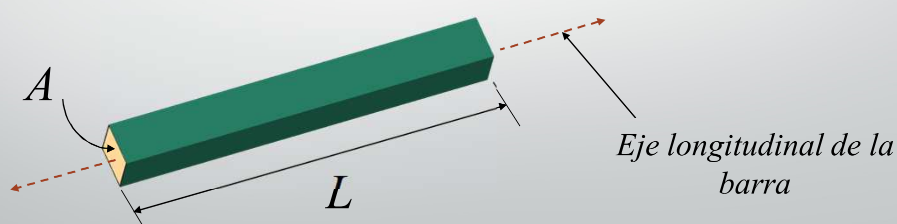
- ✓ La barra no admite fuerzas cortantes (transversales) ni momentos flectores.
- ✓ Se desprecia cualquier desplazamiento transversal
- ✓ Las cargas se aplican únicamente en los nudos (extremos).
- ✓ Aplica la Ley de Hooke, es decir:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

Se seguirá un razonamiento similar al empleado para hallar la matriz de rigidez de un resorte.

Cuando la barra es de sección transversal constante de área ***A***, longitud ***L*** y está hecha de un material con módulo de elasticidad ***E***, el desplazamiento Δ originado por una fuerza ***P***, que actúa en uno de sus extremos (mientras el otro se mantiene fijo) está dado por la expresión:

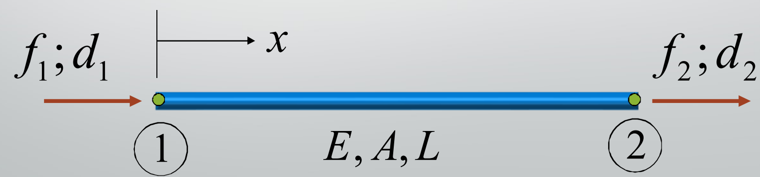
$$\Delta = \frac{PL}{EA} \qquad (1)$$



Si ese desplazamiento es el único grado de libertad (movimiento posible), la matriz de rigidez de la barra tiene sólo un término que es el valor de la carga ***P*** correspondiente a una deformación unitaria de la barra (***Δ=1***). De acuerdo con la ecuación *(1)*, se tiene:

$$k = \frac{EA}{L} \qquad (1a)$$

Considerando ahora como grados de libertad a los desplazamientos axiales d_i en ambos extremos de la barra (nodos *1* y *2*) se tiene:



En este caso, la barra tiene un comportamiento similar a un resorte por lo que su matriz de rigidez (en <u>coordenadas locales</u>) es:

$$[k] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & \dfrac{-EA}{L} \\ \dfrac{-EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Los cuatro elementos de la matriz se denominan ***coeficientes de influencia de rigidez k_{ij}***. Físicamente, k_{ij} **representa la fuerza que se genera en el nudo *i* cuando se impone un desplazamiento unitario en el nudo *j* y nulo en los demás.**

A menudo, la expresión anterior se maneja como:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} \qquad (2a)$$

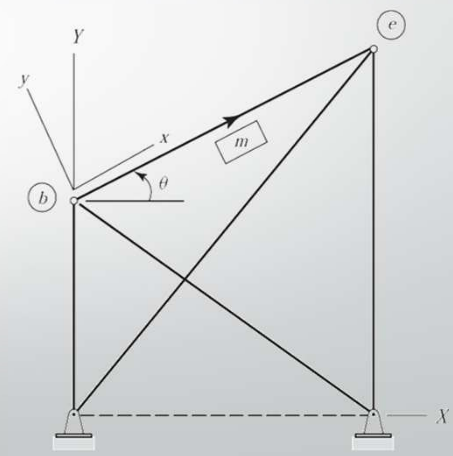
Por tanto, la relación en términos matriciales entre las fuerzas nodales y las deformaciones respectivas, para un elemento tipo barra:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Transformación de coordenadas

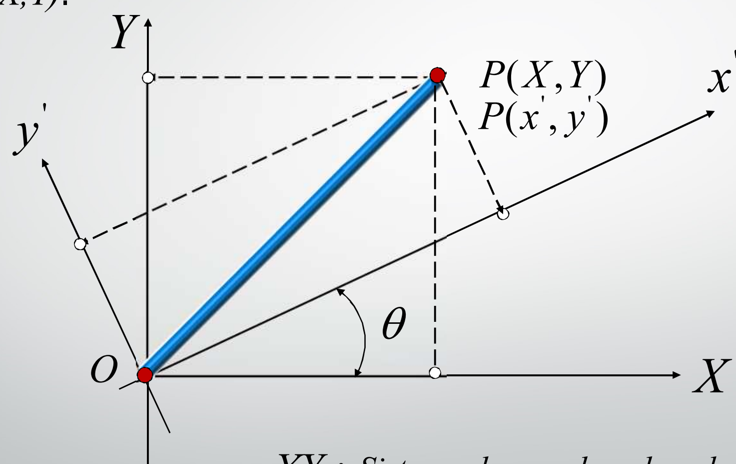
Cuando los miembros de una estructura están orientados en diferentes direcciones, se hace necesario transformar las relaciones de rigidez de cada elemento de su sistema de coordenadas local a un único sistema global para toda la estructura.

A continuación se estudiará la transformación tanto de las fuerzas como de los desplazamientos nodales de las coordenadas locales a las globales y viceversa.



Si bien la derivación se hace para un elemento tipo barra, igualmente será aplicable a miembros con más grados de libertad.

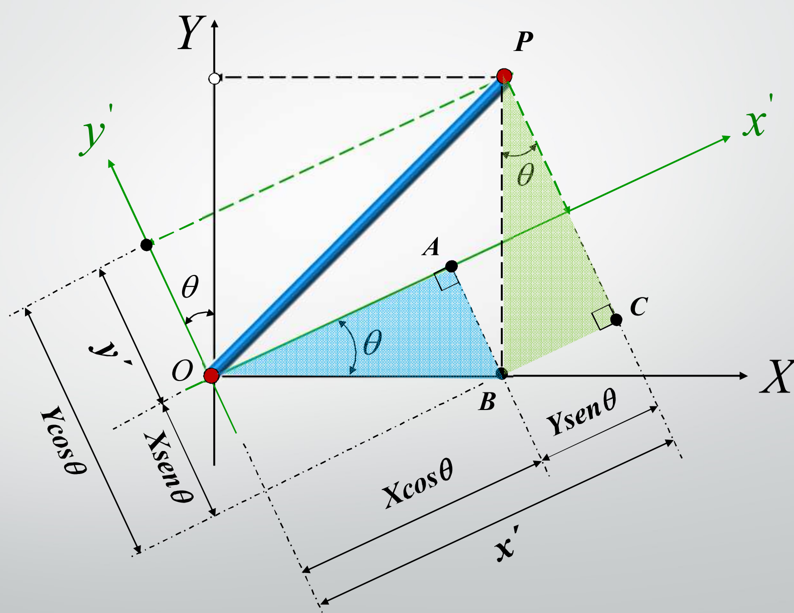
Para propósitos de generalidad de los resultados, considérese el hecho de que el eje longitudinal del elemento no coincide ni con el sistema de coordenadas locales ni globales. Por tanto, el punto ***P*** tendrá coordenadas tanto *(x',y')* como *(X,Y)*.



XY : *Sistema de coordenadas globales*

$x'y'$: *Sistema de coordenadas locales*

¿Cómo expresar las coordenadas globales de un punto en coordenadas locales y viceversa ?



De la figura anterior se obtienen las siguientes relaciones geométricas:

$$x' = X\cos\theta + Ysen\theta$$

$$y' = Y\cos\theta - Xsen\theta$$

Reordenando:

$$\begin{cases} x' = X\cos\theta + Ysen\theta \\ y' = -Xsen\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

Expresando en notación matricial:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}}_{\text{Coordenadas locales}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de transformación } [T]} \underbrace{\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}}_{\text{Coordenadas globales}} \qquad (4)$$

La matriz que permite relacionar desplazamientos (y/o fuerzas) en dos sistemas de coordenadas diferentes cuyo ángulo de rotación entre ambos es θ es:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Se observa que es esta matriz muy es *ortogonal*; o sea, su transpuesta es igual a su inversa:

$$[T]^T = [T]^{-1}$$

Si se toman en cuenta los dos nodos del elemento tipo barra, se tiene:

$$[T]=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{array}\right]_{4x4} \end{array} \qquad (5a)$$

Grados de libertad

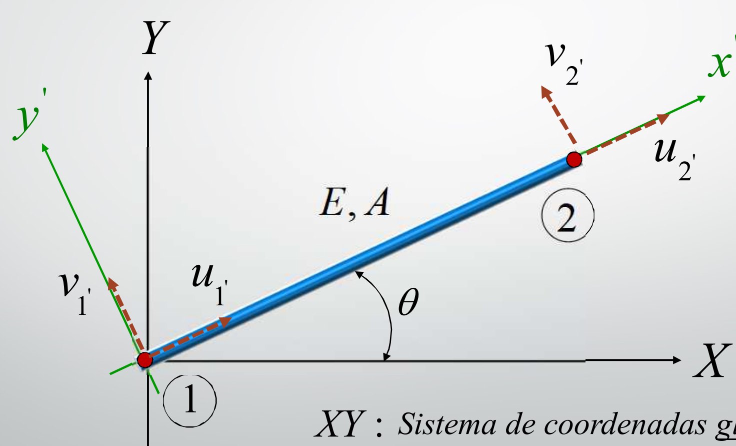
Donde: $c=\cos\theta \quad s=sen\theta$

Las fuerzas nodales también se transforman de la misma manera:

$$\{F\}=[T]\{f\} \qquad (6)$$

Matriz de rigidez en *2D*

Cuando una barra está inclinada un ángulo θ con respecto a la horizontal, conviene ahora tomar como grados de libertad los desplazamientos longitudinales u y transversales v de sus extremos.



XY : *Sistema de coordenadas globales*

$x'y'$: *Sistema de coordenadas locales*

Aumentando la ecuación $(2a)$, de manera que se incorporen los <u>cuatro grados de libertad</u>, se tiene:

Grados de libertad →

$$[k]=\frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_{1'} & v_{1'} & u_{2'} & v_{2'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} \end{array} \qquad (7)$$

De acuerdo con la hipótesis de pequeñas deformaciones, se asumen que los desplazamientos transversales v <u>no contribuyen a la deformación de la barra</u>. En otras palabras, es razonable considerar que los efectos de las cargas axiales y los momentos flexionantes están *descacoplados*.

De la expresión se tiene entonces la relación matricial básica para <u>coordenadas locales</u>:

$$\{f\}=[k]\{d\} \qquad (8)$$

Aplicando las transformaciones de coordenadas respectivas:

$$[T]\{F\}=[k][T]\{D\}$$

Multiplicando ambos lados por $[T]^T$

$$\underbrace{\boxed{[T]^T[T]}}_{[I]}\{F\}=\underbrace{\boxed{[T]^T[k][T]}}_{[K]}\{D\}$$

En coordenadas globales: $\{F\}=[K]\{D\}$ (9)

Es decir, la matriz de rigidez en de un elemento tipo barra, en coordenadas globales, se obtiene con la fórmula:

$$[K] = [T]^T [k][T] \qquad (10)$$

Reemplazando las expresiones *(5a)* y *(7)* en *(10)* se llega a:

$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \qquad (10a)$$

; donde: $c = \cos\theta \quad s = sen\theta$

Una vez que se tienen estas matrices para cada elemento según *(10a)*, es posible construir la matriz correspondiente a la estructura mediante una proceso llamado **Ensamblaje**.

Acá conviene recordar que el **coeficiente de rigidez** K_{ij} de esta matriz global es la fuerza en el grado de libertad i correspondiente a un desplazamiento asociado al grado de libertad j. Cada una de estas rigideces nodales se forma de acuerdo a la suma de las rigideces de los miembros que convergen al nudo.

El algoritmo consiste en sumar todos aquellos coeficientes de las matrices de los elementos que tengan asociados los mismos números de columna y fila. El resultado será ingresado en la matriz global en la posición correspondiente a esa columna y fila.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 7 & 8 & 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & K_{13}^{(3)} & K_{14}^{(3)} \\ K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(3)} \\ K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$[K] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} + K_{34}^{(3)} \\ K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} + K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} + K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$1, 2$: *Grados de libertad libres*

$3, 4, 5, 6, 7, 8$: *Grados de libertad no restringidos*

*Ilustración del proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez **[K]**$_{\textbf{condensada}}$, es decir, considerando únicamente los grados de libertad libres.*

Los desplazamientos nodales de la cercha se obtiene con la fórmula:

$$\{D\} = [K_{cond}]^{-1}\{F\} \qquad (11)$$

Donde $\{F\}$ corresponde a un vector que contiene las fuerzas aplicadas en los nudos (premisa en la que se basa el análisis de una cercha) y según el grado de libertad correspondiente.

El paso final del procedimiento es la determinación de las fuerzas en los miembros las cuales se determinan refiriéndose a la ecuación *(8)*:

$$\{f\} = [k]\{d\}$$

Debido a que los valores en el vector *{D}* de que se dispone, están referidos al sistema de coordenadas de la estructura (globales), se debe efectuar la transformación correspondiente para calcular la fuerza en un elemento como:

$$f = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Esfuerzos en los elementos tipo barra

La definición usual de esfuerzo normal σ en un elemento es fuerza axial F dividida entre su área transversal A:

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad (13)$$

Se considera como carga axial la fuerza f_2 en el nodo 2. De la ecuación *(3)*:

$$F \equiv f_2 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad (3a)$$

Reemplazando *(3a)* en *(12)*:

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

La fórmula anterior permite calcular el esfuerzo en el elemento cuando se conocen los desplazamientos locales. En algunos casos, de los que se dispone es de los desplazamiento globales $\{D\}$ por lo que el esfuerzo sería:

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}\{D\} \qquad (14a)$$

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (14b)$$

Desplazamientos globales correspondientes a los grados de libertad del elemento bajo análisis

Resumen del procedimiento

El procedimiento a seguir es:

1. Numerar nudos, elementos y grados de libertad (libres y restringidos). Este paso es conveniente resumirlo en una Tabla de conectividad.
2. Calcular la matriz de rigidez $[K]$ de cada barra empleando ***(10a)***.
3. Ensamblar la matriz de rigidez global $[K_G]$.
4. Condensar la matriz de rigidez, es decir, suprimir las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad restringidos: $[K_{cond}]$
5. Construir el vector de fuerzas ingresando la carga en él la fuerza asociada al grado de libertad correspondiente $\{F\}$.
6. Calcular los desplazamientos nodales con la expresión:

$$\{D\} = [K_{cond}]^{-1}\{F\}$$

7. Hallar las fuerzas axiales ***f*** en cada barra con la expresión ***(11)***:

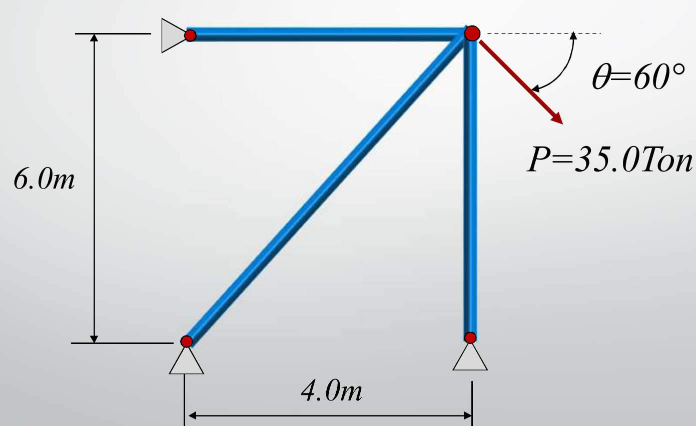
$$f = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

8. Calcular las reacciones en los apoyos:

$$\{F\}_R = [K_G]\{D\}$$

Semana 2_Ejemplo 1: Cálculo de desplazamientos, fuerzas y esfuerzos en una armadura.

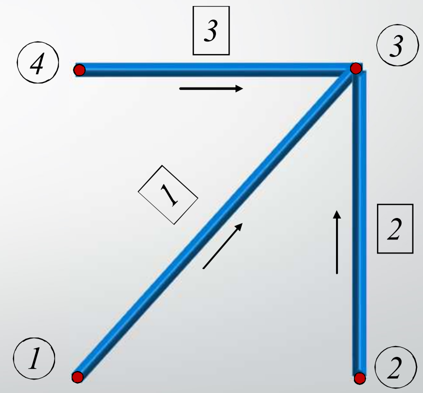
Determinar los desplazamientos nodales así como las fuerzas (axiales) y esfuerzos (normales) en cada una de los miembros de la armadura que se muestra. Suponga: $E_{acero}=2{,}100{,}000\ kg/cm^2$ y $A=32.1\ cm^2$. *No considerar p.p.*



Numeración propuesta para nudos y elementos

Tabla de conectividad

Elemento	Nudo i	Nudo j	θ	EA/L [kg/cm]
1	1	3	56.3°	93481
2	2	3	90°	112350
3	4	3	0°	168525



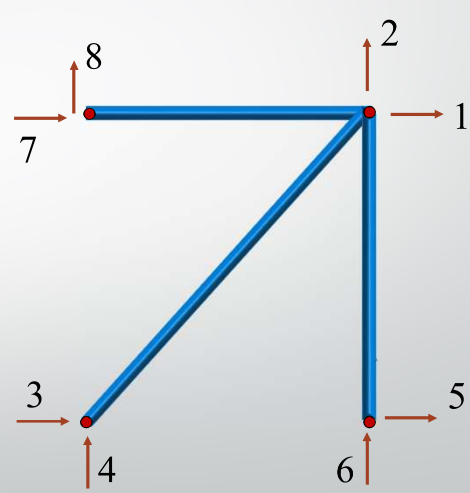
\# : *Número de nudo*

\# : *Número de elemento*

Numeración propuesta para grados de libertad (mostrados en sus direcciones positivas+)

1, 2 : *Grados de libertad libres*

3, 4, 5, 6, 7, 8 : *Grados de libertad restringidos*



Matriz de rigidez de cada barra en coordenadas globales:

Número de grado de libertad

$$[K]_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad 3 & \quad\quad 4 & \quad\quad 1 & \quad\quad 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 28778 & 43151 & -28778 & -43151 \\ 43151 & 64703 & -43151 & -64703 \\ -28778 & -43151 & 28778 & 43151 \\ -43151 & -64703 & 43151 & 64703 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$[K]_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & \quad\quad 6 & \quad\quad 1 & \quad\quad 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 112350 & 0 & -112350 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -112350 & 0 & 112350 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$[K]_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad 7 & \quad\quad 8 & \quad\quad 1 & \quad\quad 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 168525 & 0 & -168525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -168525 & 0 & 168525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

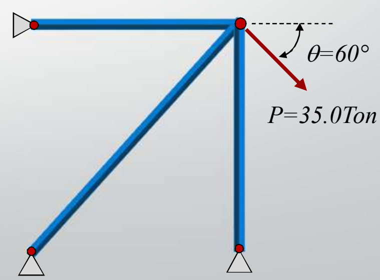
NOTA: *Todos los valores en kg/cm*

Para propósitos de este ejercicio, ahora se ensambla la matriz global condensada (sólo considera los g.d.l. libres):

$$[K]_{cond} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \quad\quad\quad 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 197303 & 43151 \\ 43151 & 177053 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \frac{kg}{cm}$$

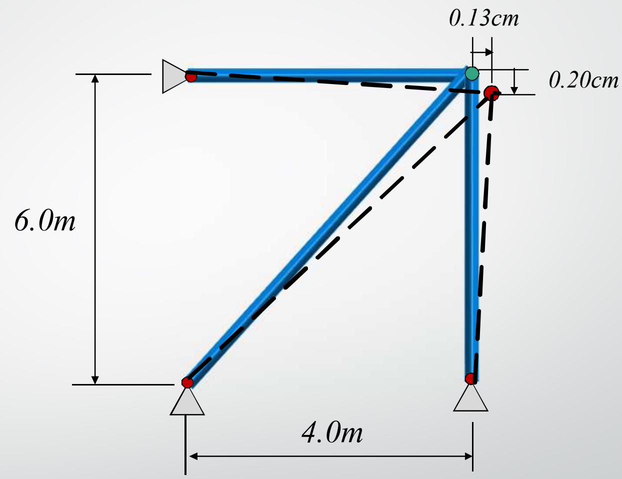
Se construye el vector de fuerzas nodales:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} +35000 \cdot \cos 60° \\ -35000 \cdot sen 60° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17500kg \\ -30311kg \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$



$$\{D\} = [K_{cond}]^{-1}\{F\}$$

$$\{D\} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.133cm \\ -0.204cm \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathit{1} \\ \mathit{2} \end{array}$$



Curva elástica o deformada ("deformed shape")

Estructuras sin deformar ("undeformed shape")

Finalmente se calculan las fuerzas axiales en cada una de las barras de la armadura. Para el primer elemento se tiene:

$$f_1 = 93481\frac{kg}{cm}\begin{bmatrix} -0.55 & -0.83 & 0.55 & 0.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0cm \\ 0cm \\ 0.133cm \\ -0.204cm \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathit{3} \\ \mathit{4} \\ \mathit{1} \\ \mathit{2} \end{array}$$

$$f_1 = -8929kg$$

*Signo negativo implica barra en **compresión***

Barra **2**: $f_2 = -22882kg \Rightarrow compresión$

Barra **3**: $f_3 = 22454kg \Rightarrow tensión$